Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2012**	**63911**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge $Z(G) = \{a \in G \mid \forall b \in G : a \cdot b = b \cdot a\}$. Bestimmen Sie das Zentrum der orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \,|\, A^t A = E_2\}$ über den reellen Zahlen.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass in der symmetrischen Gruppe S_5 alle Untergruppen der Ordnung 8 zur Diedergruppe D_4 (der Symmetriegruppe eines Quadrates) isomorph sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Die Teilmenge $R = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists \ \ a, b \in \mathbb{Z} : q = \frac{a}{b} \text{ und } 2 \nmid b \text{ und } 3 \nmid b\}$ des Körpers der rationalen Zahlen ist ein Unterring, der die ganzen Zahlen enthält.

a) Bestimmen Sie die Einheiten-Gruppe $R^\times$.

b) Zeigen Sie, dass 2 und 3 Primelemente von R sind.

c) Zeigen Sie, dass jedes Primelement entweder zu 2 oder zu 3 assoziiert ist. (Begriff *assoziiert*: Zwei Elemente $x, y \in R$ sind zueinander assoziiert, wenn es eine Einheit u gibt mit $x = u \cdot y$.)

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben ist das Polynom $P = X^2 + 3 \cdot X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie

a) die Nullstellen von P modulo 5,

b) die Nullstellen von P modulo 11,

c) die Nullstellen von P modulo 11^2,

d) die Nullstellen von P modulo 605.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $X^5 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Seien $\alpha = \sqrt[5]{-5} \in \mathbb{R}$, $\zeta = e^{\frac{2 \cdot \pi}{5} \cdot i}$. Zeigen Sie:

a) Der Körper K wird von α und ζ über $\mathbb{Q}$ erzeugt.

b) Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ ist galoissch, und $[K : \mathbb{Q}] = 20$.

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 20.

d) Die Galoisgruppe hat einen Normalteiler der Ordnung 5.

e) Die 2-Sylow-Untergruppen der Galoisgruppe sind zyklisch mit der Ordnung 4.

(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine **kurze** Begründung an:

a) Die Gruppen $Z_6 \times Z_{10}$ und $Z_2 \times Z_{30}$ sind isomorph (Z_n bezeichne dabei die zyklische Gruppe der Ordnung n).

b) Die alternierende Gruppe A_4 ist eine einfache Gruppe.

c) In der symmetrischen Gruppe S_5 sind alle Elemente der Ordnung 2 konjugiert.

d) In $\mathbb{Z}[X]$ ist (X) ein Primideal.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Begründen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung p in G durch $p-1$ teilbar ist, d. h.,

$$|\{a \in G \mid \operatorname{ord}(a) = p\}| = (p-1) \cdot k \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $M_a = \{a,\, a^2,\, \dots,\, a^{p-1}\}$ für $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$.)

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie alle Teiler von 6 im Ring in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + \sqrt{-6} \cdot b \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f = X^4 + 4\,X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Begründen Sie, dass f irreduzibel ist.

b) Warum ist die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ galoissch?

c) Es sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Begründen Sie, dass $\beta := \alpha^3 + 3\,\alpha$ eine Nullstelle von f ist.

d) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = L$ gilt.

e) Wie viele Elemente enthält die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$?

f) Ist die Galoisgruppe zyklisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (Hinweis: Betrachten Sie den $\mathbb{Q}$-Automorphismus σ, der durch $\sigma(\alpha) = \beta$ gegeben ist, und bestimmen Sie $\sigma^2(\alpha)$.)

(10 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

In der Gruppe $G := GL_4(\mathbb{C})$ betrachten wir die Teilmenge

$$M := \left\{ B \in GL_4(\mathbb{C}) \;\middle|\; B^2 = E_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass alle Matrizen $B \in M$ diagonalisierbar sind.

b) Zeigen Sie, dass die Operation $G \times M \to M$, $(A, B) \mapsto ABA^{-1}$ von G auf M durch Konjugation wohldefiniert ist und die Menge M in genau 5 disjunkte Bahnen zerlegt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, $\zeta := \exp(2\pi i/p) \in \mathbb{C}$ und $\sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}_{>0}$. Weiter sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^p - p$ in $\mathbb{C}$ und M der Zerfällungskörper des Polynoms $g(X) = X^{p^2} - 1$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{p})$.

b) $[L : \mathbb{Q}] = [M : \mathbb{Q}]$.

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

d) Die Körper L und M sind nicht isomorph.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ ist das Polynom $(X-1)^2$ ein Teiler von $f(X) := aX^{30} + bX^{15} + 1$?

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie: Ist $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ die zugehörige Galoisgruppe, $\alpha \in L$ und $f(X)$ das normierte Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie, dass

$$f(X)^{[L:K(\alpha)]} = \prod_{\sigma \in G} \big(X - \sigma(\alpha)\big)$$

gilt.

(6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2012**	**63911**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl und $q = p^l$ für ein $l > 0$ ($l \in \mathbb{N}$). Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_q$ und Determinante 1 die Ordnung $q(q^2-1)$ hat.

Wir betrachten nun die Untergruppen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \mid a \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q \right\}$$

und

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \mid a \in \mathbb{F}_q \right\}$$

von G. (3 Punkte)

a) Sei $\Omega = G/B$ die Menge der Linksnebenklassen von G bzgl. B. Bestimmen Sie die Ordnungen von N^- und B und die Anzahl $|\Omega|$ der Elemente aus Ω.

(1 Punkt)

b) Die Gruppe N^- operiert auf Ω durch Multiplikation von links. Zeigen Sie, dass diese Operation einen Fixpunkt besitzt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:

Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ so, dass die Gleichung

$$x^{101} - (x+1)^{101} + x^2 - 47 \equiv 0 \bmod 101$$

erfüllt ist?

(3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper $L \subset \mathbb{C}$ von

$$P(X) := (X^3 - 2)(X^2 - 5) \in \mathbb{Q}[X].$$

(2 Punkte)

b) Zerlegen Sie $P(X)$ über L in Linearfaktoren und bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie ein primitives Element von L. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Galoisgruppe $Gal(L/\mathbb{Q})$. (3 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}] \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass R bezüglich der Normfunktion

$$N\colon R \longrightarrow \mathbb{N},\ z \longmapsto z\overline{z},$$

ein euklidischer Ring ist.

a) Bestimmen Sie alle Einheiten von R. (2 Punkte)

b) Zerlegen Sie 3, 5 und 7 in Primfaktoren in R. (3 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Die Anzahl der Tänzer in einem Ballsaal liegt zwischen 100 und 200. Stellt man sie in 11-er Reihen auf, so bleibt ein Tänzer allein. Stellt man sie dagegen in 5-er Reihen auf, so bleiben drei übrig. Und stellt man sie in 3-er Reihen auf, so bleiben zwei Tänzer allein. Wieviele Tänzer sind es genau? (3 Punkte)

b) Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/57\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an. (2 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Seien n, $m > 0$ natürliche Zahlen. Mit $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge der $(n \times m)$-Matrizen mit rationalen Einträgen. Seien $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ die allgemeinen linearen Gruppen in den Dimensionen n und m über $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})) \times \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}), \quad ((S,T),A) \mapsto S \cdot A \cdot T^{-1}$$

auf $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q})$ operiert, aber nicht effektiv. (Dabei heißt eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ einer Gruppe G auf einer Menge X *effektiv*, wenn aus $\forall x \in X: g{\cdot}x = x$ für ein Gruppenelement $g \in G$ schon $g = 1$ folgt.)

b) Zeigen Sie, dass diese Operation genau $r+1$ Bahnen besitzt, dabei ist $r := \min(m,n)$. (Tipp: Verwenden Sie den Rang einer Matrix.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ keine mehrfachen Nullstellen in den komplexen Zahlen besitzt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien p eine Primzahl und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Sei $R = \mathbb{Z}[\zeta]$ der von ζ erzeugte Unterring von $\mathbb{C}$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}/\left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\right) \to R/(a-\zeta), \quad n + \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\right) \mapsto n + (a-\zeta)$$

ein wohldefinierter Ringisomorphismus ist und folgern Sie daraus, dass $2-\zeta$ genau dann ein Primelement in R ist, wenn $2^p - 1$ eine Primzahl ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl. Sei K ein Körper der Charakteristik 0.

a) Sei E eine (endliche) galoissche Körpererweiterung von K. Zeigen Sie, dass E/K einen Zwischenkörper F/K besitzt, so dass der Grad $[E : F]$ eine p-Potenz ist und der Grad $[F : K]$ nicht von p geteilt wird. (Die Zahl 1 ist eine p-Potenz für jede Primzahl p.)

b) Besitze K die Eigenschaft, dass der Grad $[L : K]$ jeder nicht trivialen endlichen Körpererweiterung L/K von p geteilt wird. Zeigen Sie, dass dann der Grad einer jeden endlichen Körpererweiterung über K eine p-Potenz ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei p eine Primzahl. Für jede nicht verschwindende ganze Zahl a sei $\nu_p(a)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von a (also insbesondere genau dann 0, falls p kein Teiler von a ist). Ist b eine weitere nicht verschwindende ganze Zahl, so definieren wir $\nu_p(\frac{a}{b}) := \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

a) Sei $\frac{a}{b}$ ein vollständig gekürzter Bruch mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $\frac{2\pi}{b}$ aus dem Winkel $\frac{2\pi a}{b}$ nur mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

b) Sei $r \in \mathbb{Q}^\times$ eine nicht verschwindende rationale Zahl. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $2\pi r$ genau dann mit Zirkel und Lineal dritteln läßt, wenn $\nu_3(r) \geq 0$ gilt.

(6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Geben Sie drei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 2012 konkret an und beweisen Sie, dass diese nicht isomorph sind!

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für jedes $n \in$ der Zentralisator des n–Zyklus $(1, 2, 3, \ldots, n)$ in der symmetrischen Gruppe S_n die zyklische Gruppe $\langle(1, 2, 3, \ldots, n)\rangle$ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei $P(X) = X^4 - 2 \in \; [X]$. Es sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $P(X)$ in über . Ferner sei $\alpha \in K$ eine Nullstelle von $P(X)$.

a) Zeigen Sie, dass $[K : \;] = 8$ gilt, und dass es eine Nullstelle $\beta \neq \pm\alpha$ von $P(X)$ in K gibt, so dass $R := \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ die Menge aller Nullstellen von $P(X)$ ist.

b) Es bezeichne S_R die Gruppe der Permutationen von R. Sei $s \in S_R$ die Permutation $R \to R,\ x \mapsto -x$. Zeigen Sie, dass die Untergruppe $C := \{\sigma \in S_R : \ \sigma \circ s = s \circ \sigma\}$ Ordnung 8 hat.

c) Es bezeichne $G := \mathrm{Gal}(K/\;)$ die Galoisgruppe von K über . Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow S_R,\ \sigma \longmapsto (x \mapsto \sigma(x))$$

einen Gruppenisomorphismus zwischen G und C induziert.

d) Ist G auflösbar?

(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Wie viele Lösungen hat die Gleichung $X^2 + 46X + 1 \equiv 0$ in /2012 ? (503 ist eine Primzahl.)

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Zerlegen Sie das Polynom $X^5 - 7X^3 + 503X^2 + 12X - 2012$ in $[X]$ in irreduzible Faktoren!

(5 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2013**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = x^2 - 23y^2\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Primzahl 97 ist kein Element von S.
Hinweis: Sie können zum Beispiel das Quadratische Reziprozitätsgesetz verwenden. (5 Punkte)

b) Sind $a, b \in S$, dann ist auch $ab \in S$. (5 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei weiter $f_0 = X$ und für $n \geq 1$ sei $f_n = f_{n-1}(f) = f(f_{n-1})$ das n-fach iterierte Polynom f, also

$$f_1 = X^2 - 2, \quad f_2 = (X^2-2)^2 - 2, \quad f_3 = ((X^2-2)^2-2)^2 - 2 \quad \text{usw.}$$

Zeigen Sie:

a) Alle Polynome f_n sind irreduzibel. (5 Punkte)

b) Sei $z_n = e^{\pi i/2^{n+1}}$ eine primitive 2^{n+2}-te Einheitswurzel. Für k ungerade ist $2\cos\frac{k\pi}{2^{n+1}} = z_n^k + z_n^{-k}$ eine Nullstelle von f_n. (5 Punkte)

c) Die Galoisgruppe von f_2 über $\mathbb{Q}$ ist abelsch. (5 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $G = SL(2, \mathbb{F}_7) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7) \mid \det(A) = 1\}$ und $H = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{F}_7\right\}$.

a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe der Ordnung 7 von G ist. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ Ordnung 336 hat. (6 Punkte)

c) Wie viele Untergruppen der Ordnung 7 gibt es in G? (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es höchstens $n-1$ komplexe Zahlen α gibt, für die $f(X) - \alpha$ eine mehrfache Nullstelle hat. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei M die Menge der 3×3-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$, deren charakteristisches Polynom $(X-1)^3$ ist.

a) Zeigen Sie: $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ operiert durch Konjugation auf M: $P * A = PAP^{-1}$ für $P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ und $A \in M$. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation. (6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass alle Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung besitzen.

Bestimmen Sie die Elemente endlicher Ordnung in den Faktorgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $q > 1$ eine Potenz einer Primzahl p, und sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen. Sei n eine natürliche Zahl, und sei $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{F}_q$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe G von Ordnung $q^{\binom{n}{2}}(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdots (q-1)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen mit charakteristischem Polynom $(X-1)^n$ eine Sylowsche p-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F}_q)$ bilden.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei R ein Integritätsbereich, und seien $x_1, \dots, x_n$ und a Elemente von R. Zeigen Sie: Ist R faktoriell und d ein größter gemeinsamer Teiler von $x_1, \dots, x_n$, so ist ad ein größter gemeinsamer Teiler von $ax_1, \dots, ax_n$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei K $= \mathbb{F}_5(\sqrt[4]{3})$. Zeigen Sie, dass K eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{F}_5$ ist und bestimmen Sie ihre galoissche Gruppe. Bestimmen Sie weiter den Verband der Zwischenkörper von K über $\mathbb{F}_5$ (das heißt alle Zwischenkörper geordnet nach Inklusionen). Bestimmen Sie schließlich die Anzahl der primitiven Elemente der Erweiterung K über $\mathbb{F}_5$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $L \supseteq K$ eine endliche, galoissche Körpererweiterung. Sei $L' \supseteq K$ eine beliebige weitere Körpererweiterung von K. Zeigen Sie: Gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\phi\colon L \to L'$ mit $\phi|_K = \mathrm{id}_K$, so ist schon $K = L$.

(6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Man konstruiere eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2013.

Hinweis: Man verwende ein geeignetes semidirektes Produkt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen, und seien $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ Nullteiler im Restklassenring $R := \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$\xi\eta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi R + \eta R = R\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

Hinweis: Man betrachte eine durch Multiplikation gegebene Abbildung. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen. Man bestimme alle normierten, irreduziblen Polynome mit Grad ≤ 2 in $\mathbb{F}_3[X]$.

b) Ist $X^4 + 9X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel?

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ und $k_n := \mathrm{kgV}\{1, \ldots, n\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, \ldots, n$. Zeigen Sie, für alle $n \in \mathbb{N}$, die folgenden Formeln über die Grade von Körpererweiterungen:

a) $[\mathbb{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : \mathbb{Q}] = \Phi(k_n)$, wobei Φ die Eulersche Φ-Funktion bezeichnet.

b) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[1]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = k_n$. (6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Herbst 2013**	**63911**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Aussagen sind *richtig* bzw. *falsch*? Geben Sie jeweils eine *kurze* Begründung an:

a) Die symmetrische Gruppe S_3 und die additive Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sind isomorph.

b) Die Primzerlegung von $10 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ lautet

$$10 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}).$$

c) Es ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11},\mathrm{i})$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 11 \in \mathbb{Q}[X]$.

d) In $\mathbb{R}[X]$ ist (X) ein Primideal.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei G eine Gruppe der Ordnung $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Mit Syl_5 bezeichnen wir die Menge der 5-Sylowgruppen von G und mit n_5 bezeichnen wir die Mächtigkeit von Syl_5.

a) Begründen Sie, dass $n_5 \in \{1, 6\}$ gilt.

b) Begründen Sie, dass G im Fall $n_5 = 1$ nicht einfach ist.

c) Begründen Sie, dass

$$\cdot : G \times \mathrm{Syl}_5 \to \mathrm{Syl}_5\,, \ (g, P) \mapsto g\,P\,g^{-1}$$

eine transitive Operation von G auf Syl_5 ist.

d) Begründen Sie, dass G im Fall $n_5 = 6$ nicht einfach ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Kern des Homomorphismus $\lambda : G \to S_6$, der durch die Operation aus (c) gegeben ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Es sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ eine Matrix über den komplexen Zahlen, hierbei gelte $\lambda \neq 0$. Man zeige, dass für alle $k \geq 1$ die Matrix A^k die Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ hat.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Q}[X]/(X^{10} - 1)$.

a) Bestimmen Sie ein kartesisches Produkt von Körpern, das zu R isomorph ist.

Hinweis: Der chinesische Restsatz kann hilfreich sein.

b) Wie viele Ideale besitzt R?

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei $f = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$; weiter sei $a \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von f.

a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

b) Geben Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ des Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$ an.

c) Geben Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ an.

d) Geben Sie λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{Q}$ an mit

$$a^4 - 2\,a^3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot a + \lambda_3 \cdot a^2 .$$

(16 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist. (2 Punkte)

b) Sei α eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ aus Teilaufgabe a) in einem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}_2}$ von $\mathbb{F}_2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_{16}$ gilt, dass $\alpha \in \mathbb{F}_{16}^\times$ gilt, und dass α ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_{16}^\times$ von $\mathbb{F}_{16}$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2:

Die endliche Gruppe G operiere (von links) auf der endlichen Menge X. Für jedes $\sigma \in G$ bezeichne $i(\sigma) := |\{x \in X \mid \sigma x = x\}|$ die Anzahl der Fixpunkte von σ.

Zeigen Sie, dass sich die Anzahl der Bahnen der Operation zu

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} i(\sigma)$$

berechnet.

Hinweis: Bestimmen Sie die Kardinalität der Teilmenge

$$Z := \{(\sigma, x) \in G \times X \mid \sigma x = x\} \subseteq G \times X$$

auf zwei verschiedene Arten.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.

(2 Punkte)

b) Sei K ein Körper, der eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe A_4 besitzt. Zeigen Sie, dass eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq F$ mit $[F : K] = 4$ existiert, so dass $F = K(\alpha)$ für alle $\alpha \in F \setminus K$ gilt.

(4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei K ein endlicher Körper. Sei $a \in K$. Zeigen Sie, dass es Elemente $x, y \in K$ gibt, so dass $x^2 + y^2 = a$ gilt.

(Tipp: Wie viele Quadrate gibt es in K?) (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei S_5 die Permutationsgruppe von 5 Ziffern. Wie viele Elemente in S_5 haben die Ordnung 4? Wie viele Untergruppen von S_5 haben 4 Elemente?

(6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $r \geq 1$. Die komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ seien alle algebraisch vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$. Setze $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Zeigen Sie, dass K eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Sei $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und C_2 eine Gruppe der Ordnung 2. Geben Sie einen natürlichen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to C_2^r$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $f = X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen x_1 und x_2 hat.

b) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

c) Sei $g = X^3 + 4X - 1$, und $a \in \mathbb{C}$ komplex. Zeigen Sie, dass es genau dann komplexe Zahlen $b, c, d \in \mathbb{C}$ gibt mit $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, wenn $g(a^2) = 0$.

d) Zeigen Sie, dass g irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

e) Sei $g(a^2) = 0$ für $a \in \mathbb{R}$ reell. Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$.

f) Zeigen Sie, dass x_1 oder x_2 nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Eine Permutation σ sei das Produkt zweier disjunkter Zykel der teilerfremden Längen k und ℓ. Welche Ordnung hat σ?

b) Sei $a(n)$ die größte Elementordnung in der symmetrischen Gruppe S_n. Man zeige $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n} = \infty$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl, $e, n \in \mathbb{N}$ und G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ mit p^e Elementen. Zeigen Sie: Es gibt einen Spaltenvektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ mit $\gamma \cdot v = v$ für alle $\gamma \in G$. (Hinweis: Betrachten Sie die Bahnlängen von G auf $\mathbb{F}_p^n$.)

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei p eine Primzahl. Man zeige, dass außer 3 jeder Primteiler von 2^p+1 größer als p ist. (Hinweis: Betrachte die multiplikative Ordnung von 2 modulo eines Primteilers von $2^p + 1$.)

(6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: __________	**Frühjahr**	**63911**
Kennwort: __________	**2014**	
Arbeitsplatz-Nr.: __________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 168, die genau 5 Untergruppen der Ordnung 42 hat. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist. (12 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $L \supseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in L$ folgende Aussagen äquivalent sind: (10 Punkte)

a) Es gilt $L = K(\alpha)$.

b) Für alle $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $g \neq \mathrm{id}_L$ gilt $g(\alpha) \neq \alpha$.

Aufgabe 3:

Es seien K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K. Es seien weiter m, n nichtnegative ganze Zahlen. Zeigen Sie:

a) Ist $m > 0$, dann ist $x^r - 1$ der Rest bei Division von $x^n - 1$ durch $x^m - 1$, wobei r der Rest bei Division von n durch m ist. (5 Punkte)

b) Sei $g = \mathrm{ggT}(m, n)$. Dann ist $x^g - 1$ ein größter gemeinsamer Teiler von $x^n - 1$ und $x^m - 1$ in $K[x]$. (7 Punkte)

Aufgabe 4:

Seien A, B komplexe $(n \times n)$-Matrizen mit $AB = BA$.

a) Man zeige, dass B jeden Eigenraum von A invariant lässt, d.h.: Für jeden Eigenraum U von A gilt $Bu \in U$ für alle $u \in U$. (3 Punkte)

b) Man zeige, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor haben, d.h.: Es gibt $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $Av = \lambda v$, $Bv = \mu v$. (5 Punkte)

c) Man zeige anhand eines Beispiels, dass die Aussage aus b) ohne die Voraussetzung $AB = BA$ im Allgemeinen nicht gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 5:

Es seien p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[t]$. Wie üblich sei $\mathbb{F}_p(t^p)$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{F}_p(t)$, der t^p enthält.

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^p - t^p \in \mathbb{F}_p(t^p)[X]$ irreduzibel ist. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p(t) \supseteq \mathbb{F}_p(t^p)$ endlich und normal, aber nicht separabel ist. (8 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es seien die Polynome $p(X) = X^{500} - 2X^{301} + 1$ und $q(X) = X^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ gegeben. Berechnen Sie den Rest der Division von $p(X)$ durch $q(X)$. (8 Punkte)

Aufgabe 2:
In einem kommutativen Ring R sei $r \in R$ die Summe zweier Quadrate, also $r = a^2 + b^2$ für geeignete $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass dann auch $2r$ eine Summe zweier Quadrate ist.
(8 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ definieren wir den Gruppenautomorphismus

$$\phi_h \colon G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto hgh^{-1}.$$

Die Automorphismen ϕ_h mit $h \in G$ nennt man *innere Automorphismen* von G. Wir definieren

$$\operatorname{Inn}(G) = \{\phi_h \mid h \in G\} \subseteq \operatorname{Aut}(G)$$

und das Zentrum von G,

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ für alle } y \in G\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Inn}(G)$ ein Normalteiler in $\operatorname{Aut}(G)$ ist. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi \colon G \longrightarrow \operatorname{Inn}(G), \quad h \longmapsto \phi_h$$

einen Gruppenisomorphismus $G/Z(G) \to \operatorname{Inn}(G)$ induziert. (4 Punkte)

c) Beschreiben Sie alle Automorphismen der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit sieben Elementen und begründen Sie, weshalb in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ nur die Identität ein innerer Automorphismus ist.
(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und sei K der Zerfällungskörper des Polynoms

$$P(X) = X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X].$$

Wir nehmen an, dass $P(X)$ keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat. Zeigen Sie:

a) $P(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und hat keine mehrfachen Nullstellen in K. (3 Punkte)

b) Die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe von S_3. (3 Punkte)

c) G hat entweder 3 oder 6 Elemente. (3 Punkte)

d) Sei $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$ die Nullstellen von $P(X)$ sind. Dann gilt für $\sigma \in G$ stets $\sigma(\delta) = \delta$ oder $\sigma(\delta) = -\delta$. (3 Punkte)

e) Gilt $\sigma(\delta) = \delta$ für alle $\sigma \in G$, dann ist G zyklisch und hat Ordnung 3. Anderenfalls ist $G = S_3$. (4 Punkte)

Aufgabe 5:

Wir schreiben $C^\infty(\mathbb{R})$ für den Ring (unter punktweiser Addition und Multiplikation) und $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen.

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ heiße *D-finit*, wenn der von f und allen Ableitungen $f', f'', f''', \ldots$ erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum $D(f)$ von $C^\infty(\mathbb{R})$ endlich-dimensional ist.

Zeigen Sie, dass die D-finiten Funktionen einen Unterring von $C^\infty(\mathbb{R})$ bilden. (14 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Wir betrachten die komplexen (2×2)-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $G = \{\pm E, \pm A, \pm B, \pm C\}$.

a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G. (5 Punkte)

c) Welche Untergruppen sind Normalteiler von G? (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Gegeben sei ein Element c aus einem kommutativen Ring R. Für $a, b \in R$ definieren wir $a \equiv b \pmod{c}$ genau dann, wenn es ein $d \in R$ gibt mit $a - b = c \cdot d$.

a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf R definiert. (2 Punkte)

b) Es sei nun $R = \mathbb{Z}$. Finden Sie alle Lösungen $y \in \mathbb{Z}$ der Kongruenz

$$51y \equiv 34 \pmod{85}.$$

(5 Punkte)

c) Es sei nun $R = \mathbb{Q}[X]$. Finden Sie alle Lösungen $f \in \mathbb{Q}[X]$ der simultanen Kongruenzen

$$f \equiv 1 \pmod{(X^2+1)} \quad \text{und} \quad f \equiv X \pmod{(X^2-1)}.$$

(5 Punkte)

d) Es sei wieder $R = \mathbb{Z}$. Ist die Kongruenz $y^2 + 97y \equiv 3 \pmod{101}$ lösbar für $y \in \mathbb{Z}$? (3 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten die Teilmenge $R = \{a + b i\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist. (2 Punkte)

b) Beweisen Sie, dass R ein euklidischer Ring ist bezüglich der Normfunktion $d(\alpha) := |\alpha|^2$. (5 Punkte)

c) Geben Sie alle möglichen Faktorisierungen von $8 - i\sqrt{2}$ in irreduzible Elemente von R an (bis auf Reihenfolge). (8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $x^3 - \pi$ über dem Grundkörper $K = \mathbb{Q}(\pi)$. Sie dürfen im Folgenden verwenden, dass π ein über $\mathbb{Q}$ transzendentes Element ist.

a) Bestimmen Sie den Grad $[L : K]$. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$, indem Sie jeweils ein primitives Element β angeben mit $F = K(\beta)$. (7 Punkte)

c) Welche dieser Zwischenkörper sind normale Erweiterungen von K? (3 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2014**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es seien $L \supseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung und p eine Primzahl, die den Körpergrad $[L : K]$ teilt.

a) Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper $K \subseteq Z \subseteq L$ gibt, so dass

$$[L : Z] = p^m \quad \text{und} \quad p \nmid [Z : K]$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt. (8 Punkte)

b) Bestimmen Sie im Fall $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\zeta_7)$ mit einer primitiven siebten Einheitswurzel ζ_7 und $p = 3$ einen solchen Zwischenkörper, indem Sie ein primitives Element α dafür angeben.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Betrachten Sie die Teilmenge

$$\mathfrak{p}R[X] := \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i f_i(X) \;\middle|\; r \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathfrak{p} \text{ und } f_i(X) \in R[X] \right\}$$

im Polynomring $R[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Ideal von $R[X]$ ist. (2 Punkte)

b) Geben Sie einen Isomorphismus $R[X]/\mathfrak{p}R[X] \to (R/\mathfrak{p})[X]$ an (mit Beweis).

(6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Primideal, aber kein maximales Ideal von $R[X]$ ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, und es seien $\alpha, \beta \in L$, so dass $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ beide algebraisch über K sind.

Zeigen Sie, dass dann auch α und β algebraisch über K sind. (10 Punkte)

Aufgabe 4:

Die endliche Gruppe G operiere transitiv auf der endlichen Menge $X \neq \emptyset$, so dass jedes $g \in G$ mindestens einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie:

a) Es bezeichne G_x den Stabilisator von x in G. Dann gilt

$$G \setminus \{1\} = \bigcup_{x \in X} (G_x \setminus \{1\}).$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass X nur ein Element hat. (9 Punkte)

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch n den Rest n-1 hat, für alle $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. (8 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Element $e \in R$ ist *idempotent* genau dann, wenn $e^2 = e$ ist (zum Beispiel sind 0 und 1 idempotent). Zeigen Sie:

a) Wenn e idempotent ist, dann ist auch $1 - e$ idempotent, und $e \cdot (1 - e) = 0$. (2 Punkte)

b) Ist e idempotent, dann sind die Ideale eR und $(1 - e)R$ relativ prim. (2 Punkte)

c) Genau dann ist R isomorph zu einem direkten Produkt von zwei Ringen, die beide keine Nullringe sind, wenn es in R ein idempotentes Element $e \notin \{0, 1\}$ gibt. (8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $d \geq 3$, das mindestens eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ und mindestens eine Nullstelle $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ mit $\varphi(a) = b$. (2 Punkte)

b) Die komplexe Konjugation kann zu einem Automorphismus von L über $\mathbb{Q}$ eingeschränkt werden. (5 Punkte)

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch. (5 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Es seien $p \geq 2$ eine natürliche Zahl, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $a_i \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq i \leq m$, so dass

$$p^n = \sum_{i=1}^{m} p^{a_i}$$

gilt. Zeigen Sie, dass $m - 1$ durch $p - 1$ teilbar ist. (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie Kongruenzen modulo $p - 1$.

b) Für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$ sei G eine Gruppe der Ordnung p^n, und

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}$$

sei das Zentrum von G. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Konjugationsklassen von G, die nicht in $Z(G)$ liegen, durch $p - 1$ teilbar ist. (8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es seien H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und P eine p-Sylowgruppe von G für eine Primzahl p, die die Ordnung von H teilt.

a) Zeigen Sie, dass es stets ein $g \in G$ gibt, so dass $H \cap g^{-1}Pg$ eine p-Sylowgruppe von H ist.
(6 Punkte)

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $H \cap P$ nicht notwendig eine p-Sylowgruppe von H ist.
(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Die reelle (6×6)-Matrix A habe den sechsfachen Eigenwert 1 mit der geometrischen Vielfachheit 3. Es gelte weiterhin $A = E_6 + N$ mit der Einheitsmatrix E_6 und einer nilpotenten Matrix N mit Nilpotenzindex 3, d.h. $N^3 = 0$, aber $N^2 \neq 0$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.
(12 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei G eine Gruppe mit 2014 Elementen. Zeigen Sie, dass G einen zyklischen Normalteiler der Ordnung $1007 = 19 \cdot 53$ besitzt.

(11 Punkte)

Aufgabe 2:

Wie viele Quadrate gibt es im Ring $\mathbb{Z}/2014\mathbb{Z}$?

(11 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei G eine abelsche Gruppe, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in G$ zwei Elemente mit teilerfremden Ordnungen, dann gilt $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(a) \cdot \operatorname{ord}(b)$. (6 Punkte)

b) Seien k, ℓ zwei natürliche Zahlen. Beweisen Sie: Es gibt natürliche Zahlen k_0, ℓ_0 mit

$$\operatorname{ggT}(k_0, \ell_0) = 1, \quad k_0 \mid k, \quad \ell_0 \mid \ell \quad \text{und} \quad k_0\ell_0 = \operatorname{kgV}(k, \ell).$$

(4 Punkte)

c) Folgern Sie aus a) und b), dass zu beliebigen $x, y \in G$ ein $z \in G$ existiert mit $\operatorname{ord}(z) = \operatorname{kgV}\big(\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y)\big)$. (2 Punkte)

d) Beweisen Sie: Ist $m := \sup\{\operatorname{ord}(x) \mid x \in G\} < \infty$, dann gilt $\operatorname{ord}(a) \mid m$ für jedes $a \in G$. (2 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\omega^2 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}[\omega] := \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$. (2 Punkte)

b) Für $z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ sei $z^* = a - b\omega$. Dann ist die *Normabbildung*

$$N\colon \mathbb{Z}[\omega] \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad z \longmapsto zz^*$$

multiplikativ, d.h., für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$ gilt $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$. (2 Punkte)

c) Ein Element $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ ist genau dann eine Einheit, wenn $|N(z)| = 1$ ist.

(4 Punkte)

d) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{26}]$ besitzt unendlich viele Einheiten. (4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

a) Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3, das genau eine reelle Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, dass dann seine Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

(6 Punkte)

b) Sei p eine beliebige Primzahl. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms

$$X^4 - X^3 + pX^2 - p \in \mathbb{Q}[X]\,.$$

(6 Punkte)