Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Frühjahr 2009**	**63911** 63911-2009F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufgabengruppe beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Sei weiter $B \subseteq A$ eine Untergruppe mit $B \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von A.

b) Zeigen Sie, dass A höchstens 4 Elemente der Ordnung ≤ 2 hat.

c) Zeigen Sie, dass A entweder zyklisch ist oder $A \cong A_1 \times A_2$ mit A_1, A_2 zyklisch.

d) Bestimmen Sie nun alle Möglichkeiten für A.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Für ein Element g einer Gruppe G sei $\iota_g \in \mathrm{Aut}(G)$ der zugehörige innere Automorphismus: $\iota_g(h) = ghg^{-1}$. Die Gruppe G heiße vollständig, wenn die Abbildung $G \to \mathrm{Aut}(G) : g \mapsto \iota_g$ bijektiv ist.

a) Zeigen Sie, dass G genau dann vollständig ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

   i) Das Zentrum von G ist trivial.

   ii) Jeder Automorphismus von G ist ein innerer.

b) Sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Angenommen N ist vollständig. Zeigen Sie, dass N ein direkter Faktor von G ist.

(9 Punkte)

Aufgabe 3:

Für den Ring $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ betrachten wir Einheiten im Polynomring $A[t]$.

a) Zeigen Sie, dass $p(t) = 1 + 5t$ keine Einheit in $A[t]$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $q(t) = 1 + 6t$ eine Einheit in $A[t]$ ist.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

Man gebe ein normiertes, quadratisches und irreduzibles Polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ an, so dass $f(x+d)$ für keine Wahl von $d \in \mathbb{Z}$ ein Eisensteinpolynom ist.

(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufgabengruppe beträgt 29 Punkte.

Aufgabe 1:

Mit $\mathcal{S}_n$ sei die symmetrische Gruppe auf n Elementen bezeichnet und mit Z_4 eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 .

a) Wieviele Untergruppen in $\mathcal{S}_3 \times Z_4$ sind isomorph zu Z_4 ?

b) Wieviele 5-Sylowgruppen und wieviele 3-Sylowgruppen gibt es in der $\mathcal{S}_5$?

(9 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine Gruppe mit einer Untergruppe vom Index 4 . Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler vom Index 2 oder 3 hat.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $I \subset R$ ein Ideal, das nur nilpotente Elemente enthält, und $\pi : R \to R/I$ sei die kanonische Projektion. Zeigen Sie:
Ist $x \in R$ ein Element, so dass $\pi(x)$ eine Einheit in R/I ist, dann ist x eine Einheit in R .

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie den Körper $K := \mathbb{Q}\,(\sqrt[5]{3}, \sqrt{7})$.

a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}\,(\alpha)$ für $\alpha = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{7}$.

b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

(7 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufgabengruppe beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Wieviele Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_5$ gibt es?

b) Sei $f(X)$ das Polynom

$$f(X) = (X+1)^5 - 6(X+1)^3 + 2X + 8 \in \mathbb{Z}[X].$$

Wieviele Ringhomomorphismen $\mathbb{Q}[X]/(f) \to \mathbb{C}$ gibt es?

Die Antworten sind zu begründen.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Das von 5 und $4+\sqrt{11}$ erzeugte Ideal im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein maximales Ideal.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien $n \geq 3$ eine ungerade natürliche Zahl und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ die Gruppe der invertierbaren Elemente im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ operiert auf der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch Multiplikation im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ das zugehörige semidirekte Produkt mit der Verknüpfungsvorschrift $(\bar{x}_1, \bar{s}_1) \circ (\bar{x}_2, \bar{s}_2) = (\bar{x}_1 + \bar{s}_1 \cdot \bar{x}_2\,,\ \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)$ für alle $(\bar{x}_1, \bar{s}_1), (\bar{x}_2, \bar{s}_2) \in G$, und $H \subset G$ die Untergruppe aller Elemente in G mit erster Komponente 0.

Zeigen Sie: Es gibt genau n zu H konjugierte Untergruppen in G.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$ über $\mathbb{Q}$.

b) Seien M der Zerfällungskörper von $X^{15} - 10$ über $\mathbb{Q}$ und G die Automorphismengruppe von M über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Gruppe G und zeigen Sie, dass G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist.

(9 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______		
Kennwort: ______	**Herbst 2009**	**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ______		63911 – 2009 H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik(vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zeigen Sie: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ist Teiler von $n!$ genau dann, wenn $n + 1$ keine Primzahl ist. (8 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $n \geq 1$ und $M_n(K)$ der K–Vektorraum der $n \times n$–Matrizen über einem Körper K und $V \subseteq M_n(K)$ ein Untervektorraum mit $\dim V > n$. Zeigen Sie: Es gibt eine Matrix $0 \neq A \in V$ mit $\det A = 0$. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

G sei eine endliche Gruppe, und p bezeichne den kleinsten Primteiler der Gruppenordnung von G. Zeigen Sie: Jede Untergruppe U von G mit Index p ist normal. (8 Punkte)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Es gibt kein Polynom $P \in \mathbb{Z}[X]$ derart, dass $P^3 - P + 2$ durch $X^4 - 7$ teilbar ist. (8 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei I das von einer Primzahl p und X im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[X]$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2:

Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G heiße maximal, wenn für jede Untergruppe V von G mit $U \subset V \subset G$ gilt $V = U$ oder $V = G$. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie: G enthält dann und nur dann genau zwei (verschiedene) maximale Untergruppen, wenn G zu $\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q^b\mathbb{Z}$ isomorph ist mit verschiedenen Primzahlen p, q und $1 \leq a, b \in \mathbb{N}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei S_n die symmetrische Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und p eine Primzahl mit $p \leq n < p^2$. Zeigen Sie, dass jede p-Sylowuntergruppe von S_n abelsch ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ in den Variablen X, Y über $\mathbb{Q}$ sei I das von $X^3 - 7$ und $(X+Y)^2 + (X+Y) + 1$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}[X,Y]/I =: K$ ist ein Körper.

b) K enthält genau eine quadratische Erweiterung L von $\mathbb{Q}$.

(Hinweis: $K \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \zeta_3), \zeta_3$ primitive 3–te Einheitswurzel). (6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 24 an.

b) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 155 gibt.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-2}$ bezüglich der komplexen Norm $\varphi(x + y\sqrt{-2}) = x^2 + 2y^2$ ein euklidischer Ring ist.

b) Geben Sie eine Produktzerlegung von $1 + 4\sqrt{-2}$ in irreduzible Elemente aus $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-2}$ an und begründen Sie das Ergebnis.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Struktur der Galoisgruppe der normalen Hülle N von $\mathbb{Q}\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}\right)/\mathbb{Q}$ und alle Zwischenkörper von $N/\mathbb{Q}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe von $X^5 - 777X + 7$ über $\mathbb{Q}$ zur symmetrischen Gruppe S_5 isomorph ist.

(7 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________		
Kennwort: ________	**Frühjahr 2010**	**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik(vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche einfache Gruppe und H eine echte Untergruppe vom Index $k > 2$ in G. Zeigen Sie, dass die Gruppenordnung $|G|$ von G ein Teiler von $k!/2$ ist. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei L/K die quadratische Körpererweiterung mit $L = K[X]/(X^2 - a)$ mit $a \in K^* \setminus K^{*^2}$, d.h. $a \neq b^2$ für alle $b \in K^*$. Geben Sie alle normierten quadratischen Polynome $f(X) \in K[X]$ an, so dass es einen Körperisomorphismus $K[X]/(f(X)) \xrightarrow{\sim} L$ über K gibt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen und sei $K = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.

a) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

b) Sei $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad ≤ 5. Gelte $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ und $f(a) \neq 0$, wobei $a \in K$ eine Nullstelle von $X^2 + X + 1$ ist. Zeigen Sie, dass $f(X)$ irreduzibel ist.

c) Zeigen Sie, dass $X^5 + 5X^4 + 3X^3 + X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\zeta = \zeta_{11} \in \mathbb{C}$ eine primitive 11–te Einheitswurzel. Dann ist $\mathbb{Q}(\zeta)$ über $\mathbb{Q}$ galoissch mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/11\,\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

a) Geben Sie $\tau, \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ an, mit $|\langle\tau\rangle| = 2$ und $|\langle\sigma\rangle| = 5$.

b) Geben Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\zeta)$ an, mit $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$ und $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei D_6 die Diedergruppe der Ordnung 12, sei A_4 die alternierende Gruppe und sei G die von a und b erzeugte Gruppe, wobei a die Ordnung 3 und b die Ordnung 4 hat und $bab^{-1} = a^2$ gilt. Zeigen Sie, dass diese 3 Gruppen paarweise nicht isomorph sind. (6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 99 gibt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Sei G eine endliche Gruppe und sei H eine echte Untergruppe von G (d.h. $H \neq G$). Zeigen Sie:

$$G \neq \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}.$$

b) Sei $G := GL(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2 - Matrizen und sei $H < G$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, d.h.

$$H := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid c = 0\}.$$

Zeigen Sie:

$$G = \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Gauß'schen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

mit der Normabbildung $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $N(z) := z\bar{z}$. $\bar{z}$ steht dabei für die zu z konjugierte Zahl.

a) Zeigen Sie: $z \in (\mathbb{Z}[i])^* := \{z \in \mathbb{Z}[i] \mid z \text{ ist invertierbar}\} \Leftrightarrow N(z) = 1$.

b) Sei $q \in \mathbb{Z}[i]$, so dass $N(q)$ eine ungerade Primzahl ist. Zeigen Sie: q ist ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$ und für alle $\epsilon \in (\mathbb{Z}[i])^*$ gilt: $q \neq \epsilon\bar{q}$.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Sei $f := X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 \in \mathbb{Z}[X]$. Seien a_1, a_4 ungerade und a_2, a_3 entweder beide gerade oder beide ungerade. Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

b) Sei K ein Körper. Ist $f = Y^3 + XY^2 + X^3 + X^2Y + X \in K[X,Y]$ irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort!

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei E/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $\alpha \in E$, so dass $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $1 \neq \sigma \in Gal(E/K)$.

Zeigen Sie: α ist ein primitives Element von E/K. (6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen der reellen Funktion

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2.$$

Begründen Sie insbesondere, dass es über die von Ihnen angegebenen Nullstellen hinaus keine weiteren rationalen Nullstellen gibt. (5 Punkte)

Aufgabe 2:

R sei ein endlicher kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie, dass jedes Element aus R entweder Einheit oder Nullteiler ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n derart, dass die symmetrische Gruppe S_n eine Untergruppe mit Index 3 besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe und N ein Normalteiler in G der Ordnung p. Zeigen Sie, dass N im Zentrum von G liegt. (5 Punkte)

Aufgabe 5:

Das Polynom

$$f = X^4 - 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$$

sei irreduzibel, und L bezeichne seinen Zerfällungskörper in $\mathbb{C}$. Ferner sei

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - b}).$$

Beweisen Sie:

a) Ist $[L : \mathbb{Q}] = 4$, so ist $\sqrt{b} \in K$.

b) Ist $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, so ist $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

c) Ist $\sqrt{b} \in K \backslash \mathbb{Q}$, so ist $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4$.

d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

e) Welche Struktur hat die Galoisgruppe $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$?

(10 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______	**Herbst 2010**	**63911**
Kennwort: ______		
Arbeitsplatz-Nr.: ______		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

63911 - 2010 H

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:
Sei S_3 die symmetrische Gruppe und G eine Gruppe mit einer normalen Untergruppe N der Ordnung 5, so dass $G/N \cong S_3$ ist. Zeigen Sie:

a) $|G| = 30$.

b) G hat eine normale Untergruppe der Ordnung 15.

c) G besitzt mindestens drei Untergruppen der Ordnung 10, die nicht normal sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei G eine Gruppe mit $|G| = 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$ und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $|H| = 5$.
Zeigen Sie:

a) H ist ein Normalteiler von G.

b) H liegt im Zentrum von G.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Der Ring $R = \mathbb{Z}[\omega]$ ist ein euklidischer Ring mit Normabbildung $N : R \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$N(a + b\omega) = (a + b\omega)(a + b\omega^2) = a^2 - ab + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

a) Ein Element $y \in R$ ist eine Einheit in $R \Leftrightarrow N(y) = 1$.

b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Dann ist $p = a^2 - ab + b^2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn das Ideal $(p) \subset R$ kein Primideal ist.

c) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen. Das Ideal $(p) \subset R$ ist genau dann ein Primideal, wenn das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Für $r \in R$ sei $\phi_r : R[X] \to R$, $f \mapsto f(r)$ der Einsetzungshomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist $I \subsetneq \mathbb{C}[X]$ ein Ideal, so gibt es ein $r \in \mathbb{C}$, so dass $\phi_r(I) = 0$.

b) Sei I das von 3 und $X^2 + 1$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[X]$. Dann ist $I \subsetneq \mathbb{Z}[X]$ und $\phi_r(I) = \mathbb{Z}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung und $0 \neq \alpha \in K$ mit $K = k[\alpha]$. Weiter sei eine Potenz α^e (e eine positive ganze Zahl) von α in k enthalten. Sei n die minimale positive ganze Zahl, so dass $\alpha^n \in k$ ist. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha^m \in k$ für ein $m > 0$, so ist m ein Vielfaches von n.

b) Ist K/k eine separable Erweiterung, so ist die Charakteristik von k kein Teiler von n.

(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt $x^2 = 1$ für alle Elemente x der Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G heißt maximal, wenn G die einzige Untergruppe von G ist, die U echt enthält.
Zeigen Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 4$: Jede maximale Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n hat eine Ordnung $\geq n$.
(Tipp: Man unterscheide die Fälle, in denen eine maximale Untergruppe von S_n transitiv bzw. nicht transitiv operiert.)

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ einer Gruppe G sei zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Für $1 \leq m \in \mathbb{N}$ betrachte man das Polynom $f_m(X) = X^{2m} + X^m + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:

a) Jede komplexe Nullstelle von f_m ist eine Einheitswurzel.

b) f_m ist genau dann irreduzibel über $\mathbb{Q}$, wenn $m = 3^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige $n \times n$–Matrix mit $A^p = E$ für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det(A - E)$ ganzzahlig und durch p teilbar ist. (E bezeichnet die Einheitsmatrix.)

(6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:

Eine Gruppe der Ordnung 91 operiere auf einer Menge mit 71 Elementen. Zeigen Sie: Die Operation hat einen Fixpunkt. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

b) Geben Sie eine echte nichtzyklische Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ heiße *superprimitiv*, falls es paarweise teilerfremde Koeffizienten hat. Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Das Produkt von zwei superprimitiven Polynomen ist wieder superprimitiv. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Körpererweiterung $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11})$ von $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass K Galoissch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe.

b) Bestimmen Sie alle Teilkörper von K.

c) Bestimmen Sie ein primitives Element von K über $\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $P := X^4 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ und $K = \mathbb{F}_3[X]/(P)$. Weiter sei a das Bild von X in K.

a) Zeigen Sie, dass K ein Körper mit 81 Elementen ist.

b) Bestimmen Sie explizit alle Teilkörper von K. Hierbei heiße "explizit": Die Angabe einer $\mathbb{F}_3$-Basis, wobei die Basiselemente Polynome in a vom Grad ≤ 3 sind. [Hinweis: Betrachten Sie $a^{10} \in K$.]

(6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________	Frühjahr	63911
Kennwort: ________	2011	
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Geben Sie eine Basis von K über $\mathbb{Q}$ an und die Darstellungsmatrix des Endomorphismus

$$K \to K, \quad x \mapsto \sqrt[3]{5} \cdot x$$

bezüglich dieser Basis. Begründen Sie, warum diese Matrix über $\mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine endliche Gruppe. Die Ordnung von $g \in G$ bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}(g)$. Es seien $a, b, c \in G$ mit folgenden Eigenschaften: Die Gruppe G wird von $\{a, b, c\}$ erzeugt, das Element a erzeugt das Zentrum von G, und es gilt

$$bcb^{-1}c^{-1} = a.$$

a) Berechnen Sie $b^n cb^{-n}c^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(b)$.

c) Zeigen Sie, dass $b^{\operatorname{ord}(a)}$ im Zentrum von G liegt.

d) Folgern Sie hieraus $\operatorname{ord}(b) \mid (\operatorname{ord}(a))^2$.

(Hinweis: Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge aller $x \in G$ mit $xg = gx$ für alle $g \in G$.)

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$2^2 \cdot 4^2 \cdots (p-3)^2 \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \pmod{p}.$$

(Ohne Beweis darf der Wilson'sche Satz verwendet werden: Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist genau dann eine Primzahl, wenn $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist.)

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei E/K eine Körpererweiterung mit $[E : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grade 3, welches in E eine Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, dass f in K eine Nullstelle besitzt.

(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Weiter sei $f := X^q - X - a \in K[X]$ für ein $a \in K$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullstellen von f durch $\{\alpha + \beta \mid \beta \in K\}$ gegeben ist und dass $K(\alpha)$ galoissch über K ist.
(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Sei $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $\frac{p}{q}$ eine rationale Nullstelle von P, und sind p und q teilerfremde ganze Zahlen, dann gilt $q|a_n$ und $p|a_0$.

b) Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen und deren Multiplizitäten von

$$P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2$$

und zerlegen Sie P in irreduzible reelle Polynome.

c) Sei $Q_a = X^3 + 2X + a$. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass P und Q_a teilerfremd in $\mathbb{R}[X]$ sind.

(9 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $V := \mathbb{F}_2^2$ der zweidimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen. Sei

$$G := \{v \mapsto Av + b \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2), b \in V\}$$

die Gruppe der affinen Abbildungen von V.

a) Geben Sie alle Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an.

b) Zeigen Sie die folgenden Isomorphismen: $G \cong S_4$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$. (Hierbei bedeutet S_m die symmetrische Gruppe vom Grad m.)

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie zwei irreduzible Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, so dass die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(f)$ und $\mathrm{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber nicht isomorph sind. (8 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Eine ungerade Primzahl p ist Teiler einer Zahl $n^2 + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \pmod 4$ gilt. (7 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe, so existiert eine natürliche Zahl n derart, dass G isomorph ist zu einer Untergruppe der alternierenden Gruppe A_n. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie, dass

$$f := X^3 + X^2 - 2X - 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

b) Zeigen Sie, dass f eine reelle Nullstelle α im offenen Intervall $]1, 2[$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass neben α auch $-\frac{1}{\alpha+1}$ Nullstelle von f ist.

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von f ist.

e) Wie viele Elemente enthält die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$?

(10 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \to L$ ein K-Endomorphismus von L, also $\sigma|_K = id_K$.
Beweisen Sie, dass σ ein K-Automorphismus von L ist. (7 Punkte)

63911-2011 H

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2011**	**63911**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei p eine Primzahl und S_p die symmetrische Gruppe vom Grad p.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p.
b) Zeigen Sie: Die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von S_p beträgt $(p-2)!$
c) Folgern Sie aus (a) die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1(\text{mod } p)$. (9 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und p eine ungerade Primzahl. Betrachten Sie das Polynom $f = X^n + X + p \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie: Ist α eine komplexe Nullstelle von f, so gilt $|\alpha| > 1$.
b) Zeigen Sie: f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.(Hinweis: Stellen Sie hierzu Überlegungen zu Nullstellen von potentiellen Faktoren an). (6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei F ein unendlicher Körper und $f \in F[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom in n Variablen. Zeigen Sie: Ist $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $a_1, \ldots, a_n \in F$, so ist f das Nullpolynom. (Hinweis: Induktion). (8 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei F_n die Fibonaccifolge, die durch

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

definiert ist.

a) Zeigen Sie: $F_n \equiv 2n3^n \pmod 5$
b) Ist $F_{2011} + 1$ durch 5 teilbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (7 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine vollständige und exakte Definition des größten gemeinsamen Teilers $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier ganzer Zahlen a, b mit $(a, b) \neq (0, 0)$ an.

b) Beweisen Sie mit Hilfe Ihrer Definition die Formel

$$\mathrm{ggT}\left(\frac{a}{ggT(a,b)}, \frac{b}{ggT(a,b)}\right) = 1.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine endliche Gruppe und sei $n \geq 1$ mit ggT(n,ord(G))=1. Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $a \in G$ ein eindeutig bestimmtes Element $b \in G$ gibt mit $b^n = a$. (7 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und sei $f : K \longrightarrow K$ eine Abbildung.

Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p \in K[X]$ gibt mit $p(a) = f(a)$ für alle $a \in K$, und

beweisen Sie, dass das Polynom p eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich grad $(p) < q$ fordert. (8 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) Das Polynom f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass auch $\alpha^2 - 2$ eine Nullstelle von f ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist und dass die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

c) Es gilt $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$. (9 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $n \geq 5$. Man bestimme alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_n. Dabei darf (und sollte) ohne Beweis benutzt werden, dass für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe A_n einfach ist.
(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $b_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]$. Ferner setze $b_0(X) = 1$. Man zeige:

a) $b_k(m) \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

b) Die Polynome $b_k(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$, bilden eine Basis des $\mathbb{Q}$–Vektorraums $\mathbb{Q}[X]$.

c) Das Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ nehme an allen ganzzahligen Stellen ganzzahlige Werte an. Man zeige, dass $f(X)$ eine ganzzahlige Linearkombination der Polynome $b_k(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist.
(9 Punkte)

Aufgabe 3:
Die Folge a_0, a_1, a_2,... positiver reeller Zahlen sei durch $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ $(n \geq 0)$ definiert. Man zeige $[\mathbb{Q}(a_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweisen Sie, dass es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ $(n \geq 1)$ gibt, die jeweils durch eine Quadratzahl > 1 teilbar sind.
(5 Punkte)

Aufgabe 5:
Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität. Hierbei ist $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit 2 Elementen.

a) $X^5 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$

b) $X^5 + X^2Y^3 + X^3 + Y^3 + X^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$
(6 Punkte)