Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______	**Frühjahr 2006**	**63911**
Kennwort: ______		63911-2006F
Arbeitsplatz-Nr.: ______		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ habe ungerade Ordnung. Man zeige, dass f nur reelle Nullstellen hat.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $f(X,Y) = X^{17} + Y^{41}(X^3 + X + 1) - Y \in \mathbb{C}[X,Y]$.

a) Man zeige, dass f als Polynom in X über dem Koeffizientenring $\mathbb{C}[Y]$ irreduzibel ist. (Hinweis: Eisenstein-Kriterium)

b) Man zeige, dass f ein irreduzibles Element im Ring $\mathbb{C}[X,Y]$ ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^m > 1$, mit $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl.

a) Man zeige, dass jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler vom Index p ist.

b) Sei N der Schnitt der maximalen Untergruppen von G. Man zeige, dass G/N abelsch ist und Exponent p hat. (Der Exponent einer endlichen Gruppe ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen.)

(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}/2006\mathbb{Z}$.

a) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^2 - 1$ in R?

b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^3 - 1$ in R?

(7 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Beweisen Sie:

Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und U, V seien Untergruppen von G. Dann gilt $G = U \oplus V$ (d. h. G ist die direkte Summe von U und V) genau dann, wenn je zwei Nebenklassen $U + a$ und $V + b$ mit $(a, b \in G)$ genau ein Element gemeinsam haben. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Für welche Primzahlen $p = 10n + k \quad (n \geq 0, k \in \{1, 3, 7, 9\})$ ist 5 ein quadratischer Rest und für welche ein quadratischer Nichtrest? (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie:

a) Die additive Gruppe der reellen Zahlen ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.

b) Die additive Gruppe eines Körpers ist nie isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Körpers.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei L eine Galoiserweiterung eines Körpers K, so dass die Galoisgruppe von L über K die symmetrische Gruppe S_n mit $n \geq 5$ ist. Wie viele Zwischenkörper F mit $K < F < L$ existieren, so dass F eine Galoiserweiterung von K ist? Was ist die Galoisgruppe von F über K und die von L über F? (5 Punkte)

Aufgabe 5:
Beweisen Sie:

a) Eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat, ist abelsch.

b) Hat eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8 zwei verschiedene Elemente der Ordnung zwei, so ist sie isomorph zur Symmetriegruppe eines Quadrates (ist also insbesondere eine Diedergruppe).

(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 6:

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es sei M ein maximales Ideal von R.

a) Sei $1 + a$ invertierbar für jedes Element $a \in M$. Zeigen Sie, dass M das einzige maximale Ideal von R ist.

b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ der Faktorring R/M^n nur ein einziges maximales Ideal hat. (5 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine natürliche Zahl m. Beweisen Sie:

a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m|\varphi(n)$. (φ bezeichnet die Eulersche Phi–Funktion.)

b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die in ihrer Dezimaldarstellung nur aus Nullen und Einsen bestehen und Vielfache von m sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
G und H bezeichne endliche Gruppen, U sei eine Untergruppe von G und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie für die Gruppenindizes die Gleichung

$$[G : U] = [f(G) : f(U)]\,[\mathrm{Kern}\, f : (\mathrm{Kern}\, f \cap U)].$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
G sei eine Gruppe, und $G \times G$ bezeichne das direkte Produkt von G mit G. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist jede Untergruppe von $G \times G$ Normalteiler, so ist G abelsch.

b) Ist jede Untergruppe von G Normalteiler, so ist G abelsch.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
R sei ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K, und $x \in K$ sei Nullstelle eines normierten Polynoms aus $R[X]$. Zeigen Sie: $x \in R$. (5 Punkte)

Aufgabe 5:
Ist $K|\mathbb{Q}$ Galoiserweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe, so hat das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle in K. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 6:

Sind $L|K$ und $M|L$ endliche Körpererweiterungen und ist $M|K$ galoissch mit Galoisgruppe G, so ist auch der Körper

$$K(\bigcup_{\sigma\in G}\sigma(L))$$

galoissch über K. (5 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______		
Kennwort: ______	**Herbst 2006**	**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ______		63911-2006H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Polynome $p = X^3 - X + 2$ und $q = X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie, dass $K = \mathbb{Q}[X]/(p)$ ein Körper ist.

b) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse der Restklasse $\overline{q}$ von q in K.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right] \subset \mathbb{C}$ gegeben.

a) Fertigen Sie eine Skizze von R als Teilmenge der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$ an.

b) Beweisen Sie, dass R mit der komplexen Norm $\|\cdot\|^2$ ein Euklidischer Ring ist.

c) Bestimmen Sie alle Einheiten von R.

d) Zerlegen Sie 3, 5 und 7 in Primfaktoren in R.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Gegeben sei der Zerfällungskörper K des Polynoms $X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Bestimmen Sie den Grad und die Galois-Gruppe G der Körpererweiterung $K \supset \mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G und die dazugehörigen Zwischenkörper.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei G eine *nicht* abelsche Gruppe der Ordnung 231.

a) Für welche Primzahl p sind die p-Sylowgruppen in G keine Normalteiler?

b) Sei p die Primzahl aus Teilaufgabe a und sei S eine p-Sylowgruppe. Bestimmen Sie den Isomorphietyp des Normalisators $N(S) = \{ g \in G \mid gsg^{-1} \in S \text{ für alle } s \in S \}$ von S in G.

c) Können Sie G mit Hilfe der Teilaufgaben a und b als semidirektes Produkt zyklischer Gruppen schreiben?

(8 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $X = X_1 \cup X_2$ eine endliche Menge, die disjunkte Vereinigung zweier n-elementiger Mengen X_1 und X_2 ist, $(n \geq 2)$. Sei $S(X) \cong S_{2n}$ die Menge aller Permutationen von X (d.h. aller bijektiven Abbildungen $\sigma : X \to X$). Die Untermenge $G \subset S(X)$ sei wie folgt definiert:

$$G := \{\sigma \in S(X) : \sigma(X_1) = X_1 \text{ oder } \sigma(X_1) = X_2\}.$$

a) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $S(X)$ ist.

b) Sei $\varphi : G \to \{\pm 1\}$ definiert durch

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(X_1) = X_1, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus ist und $\operatorname{Ker}(\varphi)$ isomorph zu $S_n \times S_n$ ist.

c) Ist G ein Normalteiler von $S(X)$?

d) Für welche n ist die Gruppe G auflösbar?

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei K ein Integritätsring, der einen Körper k enthält. Die Dimension von K über k sei endlich.

a) Beweisen Sie, dass K selbst ein Körper ist.

b) Sei $x \neq 0$ ein Element von K über k mit Minimalpolynom

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n \in k[X].$$

Drücken Sie $y := 1/x$ als ein Polynom in x aus und bestimmen Sie das Minimalpolynom von y.

(7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie, dass das Polynom

$$F(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

irreduzibel ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Polynom modulo 3.

b) Sei

$$K := \mathbb{Q}[X]/(F(X))$$

und $\vartheta \in K$ eine Nullstelle von $F(X)$. Beweisen Sie: Es gibt einen Automorphismus $\sigma : K \to K$ mit

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}.$$

c) Sei $K_0 \subset K$ der Fixkörper von σ. Zeigen Sie, dass K_0 über $\mathbb{Q}$ von

$$\alpha := \vartheta + \frac{1}{\vartheta}$$

erzeugt wird und bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ϑ über K_0.

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei R der Ring

$$R := \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}.$$

a) Bestimmen Sie alle Ideale von R. Welche davon sind Primideale?

b) Zeigen Sie: Es gibt surjektive Ringhomomorphismen von R auf $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_{11}$, aber keinen von R auf $\mathbb{F}_9$.

c) Für eine ganze Zahl $k \geq 1$ sei

$$G_k := \{x \in R : x^k = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass G_k eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe R^* der invertierbaren Elemente von R ist und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von G_k in Abhängigkeit von k.

(7 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

a) Seien p und q natürliche Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt nur endlich viele rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, die die Ungleichung $|\frac{p}{q} - \frac{x}{y}| < \frac{1}{y^2}$ erfüllen.

b) Geben Sie eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung $x^2 - 13y^2 = -1$ an.

c) Wie erhält man aus einer Lösung in b) eine Einheit im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$?

d) Zeigen Sie, dass es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ gibt, die die Ungleichung $|\sqrt{13} - \frac{x}{y}| < \frac{1}{4y^2}$ erfüllen.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es seien p und q Primzahlen mit $p < q$.

a) Zeigen Sie mit den Sylowschen Aussagen, dass im Fall $q \not\equiv 1 \bmod p$ jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

b) Geben Sie im Falle $q \equiv 1 \bmod p$ mit Hilfe des semidirekten Produktes eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq an.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien m, n quadratfreie ganze Zahlen. Zeigen Sie: Sind die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ isomorph, dann ist $m = n$. (7 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei p Primzahl, K der Primkörper mit p Elementen und m eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Jedes Kreisteilungspolynom $\Phi_m \in K[X]$ mit $p \nmid m$ ist Produkt von irreduziblen Polynomen gleichen Grades k, wobei k der kleinste Teiler von $\varphi(m)$ ist, so dass $m \mid p^k - 1$. (8 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________		
Kennwort: ____________	**Frühjahr 2007**	**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ____________		63911-2007F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Es sei G endliche Gruppe mit 2007 Elementen.
Zeigen Sie:

a) Die Gruppe G besitzt eine normale 223-Sylow-Gruppe N.

b) Die Operation von G auf N durch Konjugation induziert eine Operation der Faktorgruppe G/N auf N und G/N enthält eine Untergruppe H der Ordnung drei, die trivial auf N operiert.

c) Folgern Sie, dass die Gruppe G einen abelschen Normalteiler der Ordnung 669 enthält.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie den endlichen Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen, das Polynom $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ und den Quotientenring $K = \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$. Weiter bezeichne α die Restklasse von X modulo $(f(X))$.

a) Zeigen Sie, dass K ein Körper mit 125 Elementen und dass $(1, \alpha, \alpha^2)$ eine $\mathbb{F}_5$ -Basis von K ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$, die den Frobenius-Automorphismus $F : K \longrightarrow K$, $x \longmapsto x^5$, bezüglich der Basis $(1, \alpha, \alpha^2)$ darstellt.

c) Bestimmen Sie eine Basis für den Eigenraum von F zum Eigenwert 1.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L für das Polynom

$$f(X) = (X^2 - 3)(X^3 + 5) \in \mathbb{Q}[X]$$

und den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie:

a) Ist R ein Hauptidealring, so ist jedes vom Nullideal verschiedene Primideal in R ein maximales Ideal.

b) Ist R ein Integritätsring und der Polynomring $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

a) Prüfen Sie jeweils, ob die alternierende Gruppe A_4 ein Element der Ordnung 6 oder eine Untergruppe der Ordnung 6 enthält (Antwort mit Begründung).

b) Geben Sie das kleinste n an, so dass A_n eine Untergruppe der Ordnung 6 enthält und das kleinste n, so dass A_n ein Element der Ordnung 6 enthält.

(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Betrachten Sie die folgenden vier nicht abelschen Gruppen der Ordnung 24:

$$S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}_2, S_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Dabei ist S_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen, D_n die Diedergruppe mit $2n$ Elementen und $\mathbb{Z}_2$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in allen vier Gruppen.

b) Bestimmen Sie (mit Begründung), welche der vier Gruppen zueinander isomorph sind (und welche nicht).

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Es wird der Unterring $R := \mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right] = \left\{a + ib\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ von $\mathbb{C}$ betrachtet.
Mit $\varphi : R \to \mathbb{N}_0, a + ib\sqrt{2} \longmapsto a^2 + 2b^2$ als euklidischer Funktion ist R ein euklidischer Ring (darf benutzt werden).

a) Welche der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 sind Primelemente in R?

b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von 6 und $4 + i\sqrt{2}$ in R.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $R[X]$ der Polynomring über einem faktoriellen Ring R. Beweisen Sie das sogenannte Gauß'sche Lemma:
Seien $0 \neq f, g \in R[X]$. Sind f und g primitiv, so auch ihr Produkt fg.
(Ein Polynom $f \neq 0$ heißt primitiv, wenn seine Koeffizienten teilerfremd sind.) (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis des Erweiterungskörpers $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ von $\mathbb{Q}$ und stellen Sie x^{-1} für $x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ als Linearkombination dieser Basis dar. (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Wie viele Zwischenkörper hat der Zerfällungskörper von $f = X^3 - 3X^2 + 5$ über $\mathbb{Q}$?
Was sind die Grade dieser Körper über $\mathbb{Q}$ und welche dieser Körper sind galoissch über $\mathbb{Q}$ (Antworten mit Begründung). (6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $K = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen, und E sei ein Erweiterungskörper von K mit $|E| = 2^8$ Elementen.
Wie viele über K primitive Elemente besitzt E? (Das sind Elemente $\alpha \in E$ mit $E = K(\alpha)$.) Begründen Sie Ihre Antwort. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei K wie in Aufgabe 1 und es sei $f = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \in K[X]$.

a) Beweisen Sie, dass f irreduzibel in $K[X]$ ist.

b) Sei (f) das von f erzeugte Ideal in $K[X]$. Es sei E der Erweiterungskörper $E := K[X]/(f)$ von K und es sei x das Element $x := X + (f) \in E$
Bestimmen Sie die Ordnung von x in der multiplikativen Gruppe E^* von E. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $G = \langle z \rangle$ eine multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung 63 (mit z als einem erzeugenden Element).

a) Bestimmen Sie (explizit) zwei nicht triviale Untergruppen G_1 und G_2 von G, so dass G das direkte Produkt von G_1 und G_2 ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elementes $z^{49} \in G$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Seien G und z wie in der Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie einen endlichen sowie einen unendlichen Körper K, dessen multiplikative Gruppe K^* eine zu G isomorphe Untergruppe enthält.

b) Sei K ein Körper und G eine Untergruppe von K^*. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^{62} z^i = 0$. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Polynom $f := X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie: $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ ist Zerfällungskörper von f.

b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

c) Beweisen Sie: $a := \sqrt[4]{3} + i$ ist ein primitives Element von L über $\mathbb{Q}$. (6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______		
Kennwort: ______	**Herbst 2007**	**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ______		63911-2007H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Für jede natürliche Zahl n ist $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ganzzahlig durch 13 teilbar.

b) Sind m und n je Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen, so ist auch ihr Produkt mn Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

c) Sind m und n je Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen, so ist auch ihr Produkt mn Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen.

(Beachten Sie, dass auch 0 Quadrat einer ganzen Zahl ist.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für eine endliche Gruppe $G \neq \{e\}$ folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

a) G ist zyklisch von Primzahlpotenzordnung.

b) G besitzt genau eine maximale Untergruppe.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei R ein Integritätsring, und M bezeichne die Vereinigung aller maximalen Ideale in R. Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe R^* von R gilt:

$$R^* = R\backslash M.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweisen oder widerlegen Sie:
Sind $L|K$ und $M|L$ Galoiserweiterungen, beide vom Grade 2, und ist $M|K$ galoissch, so ist die Galoisgruppe von $M|K$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
Beweisen Sie:

a) $f(X) | f(X^2 - 2)$.

b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ ist galoissch.

c) Die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ ist zyklisch von der Ordnung 3.

(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Sei G eine endliche Gruppe und $1 \leq e \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, so dass $g^e = 1$ ist für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass e ein Teiler der Ordnung $|G|$ von G ist und dass jede Primzahl p, welche $|G|$ teilt, auch e teilt. Geben Sie eine Gruppe G an, für die $e < |G|$ gilt. (6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$ ein Element der Ordnung $|\langle g \rangle| = p^r$, p eine Primzahl, $r \geq 1$.
Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung p^r in G ein Vielfaches von $p^{r-1}(p-1)$ ist. Geben Sie eine Gruppe mit $|G| = 12$ an, die 6 Elemente der Ordnung 4 enthält. (6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und $K[X, Y]$ der Polynomring über K in den zwei Variablen X, Y. Sei I das von X^3, Y^3, X^2Y^2 erzeugte Ideal. Bestimmen Sie $\dim_K(K[X, Y]/I)$.
Es bezeichne S den Ring $K[X, Y]/I$. Zeigen Sie, dass S genau ein echtes Primideal J enthält. Bestimmen Sie $\dim_K(S/J)$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Sei p irgendeine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grade p^2 über $\mathbb{F}_q$. (6 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $L \mid K$ eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe G. Sei $|G| = 85$. Zeigen Sie, dass L Teilkörper vom Grade 5 und vom Grade 17 über K enthält, die normal über K sind. (6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl. Man gebe eine nicht kommutative Gruppe der Ordnung p^3 an. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist n ein Teiler von
$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$? (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\Phi_d(X) \in \mathbb{Z}[X]$ das d-te Kreisteilungspolynom. Ferner seien $n \geq 1$ und z ganze Zahlen.
Zeigen Sie:
Ist p Primzahl mit $p \nmid n$, so gilt

$$p \mid \Phi_n(z) \Longrightarrow \begin{cases} z^n \equiv 1 \bmod p \\ \text{und} \\ z^d \not\equiv 1 \bmod p \text{ für alle } d \mid n, 1 \leq d < n \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein separables Polynom der Form $f(X) = h(X^2)$ für ein $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $n \geq 2$ der Grad von h. Man zeige, dass die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ isomorph zu einer echten Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_{2n} ist. (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Beweisen Sie:
Jede Abbildung $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ lässt sich als polynomiale Abbildung $x \mapsto f(x)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{F}_q[X]$ vom Grade höchstens $q-1$ darstellen. (6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________	Frühjahr	
Kennwort: ____________	2008	63911
Arbeitsplatz-Nr.: ________		63911-2008F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\sqrt[17]{19})$. (4 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe vom Grad 4 mindestens 24 Untergruppen besitzt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei E ein endlicher Körper mit 8 Elementen. Bestimmen Sie alle möglichen Minimalpolynome der Elemente von E über dem Primkörper F von E. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei E ein endlicher Körper mit 81 Elementen.

a) Wie viele Untergruppen besitzt die multiplikative Gruppe E^* ?

b) Sei F Primkörper von E.
Wie viele Elemente $z \in E$ mit $E = F(z)$ gibt es?

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Zahlen $a \in \mathbb{N}$, so dass:

$$1 \leq a < 42$$
$$x^2 \equiv a \bmod 42 \text{ für ein } x \in \mathbb{Z}.$$

b) Welche Einheiten des Rings $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ kommen als quadratische Reste vor?

(6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei Sym_n die Gruppe der Permuationen der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Die Untergruppe G von Sym_n lasse eine Teilmenge $A \subset M$ der Mächtigkeit k mit $1 \leq k \leq n-1$ invariant. Zeigen Sie: $[\mathrm{Sym}_n : G] \geq \binom{n}{k}$.
(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen, und $V = \mathbb{F}_2^n$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Für jedes Polynom $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{F}_2[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ sei $\overline{f}$ die Abbildung $V \to \mathbb{F}_2$, die $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$ auf $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ abbildet.

a) Für $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$ setze $f_v := \prod_{i=1}^{n}(X_i + a_i + 1)$. Zeigen Sie: $\overline{f}_v(v) = 1$, und $\overline{f}_v(w) = 0$ für alle $v \neq w \in V$.

b) Zeigen Sie: Zu jeder Abbildung $\phi : V \to \mathbb{F}_2$ gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{F}_2[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ mit $\phi = \overline{f}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der additiven Gruppe des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

b) Geben Sie einen Körper K an, für den die Automorphismengruppe seiner additiven Gruppe nicht kommutativ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele ganze $b \in \mathbb{Z}$, so dass das Polynom $f(X) = X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
(6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Sei $x \in X := G/H$ und sei $\emptyset \neq U \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Anzahl

$$|\{g \in G \mid gU \ni x\}|$$

unabhängig von x ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Ist G eine abelsche Gruppe, dann sei $\operatorname{tor}(G) := \{g \in G \mid \text{ es gibt ein } 1 \leq n \in \mathbb{N} \text{ mit } ng = 0\}$.
Zeigen Sie:

a) $\operatorname{tor}(G)$ ist eine Untergruppe von G und $\operatorname{tor}(G/\operatorname{tor}(G)) = \{0\}$.

b) Ist $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ ein Produkt von abelschen Gruppen G_i $(i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r)$, so gilt $\operatorname{tor}(G) = \operatorname{tor}(G_1) \times \cdots \times \operatorname{tor}(G_r)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und K_f ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f(X) = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n) \in K[X]$ mit $\alpha_i \in K_f$. Sei $E_k = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), k \leq n$. Zeigen Sie, dass $[E_k : K] \leq \frac{n!}{(n-k)!}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und $i\sqrt{5} \in \mathbb{C}, i^2 = -1$ und $L := \mathbb{Q}(\sqrt{5}), K := \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$. Sei $E = L \cdot K$ das Kompositum von L und K in $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass $E/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe G von E über $\mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen U von G.

c) Ist U eine Untergruppe von G so sei E^U der zugehörige Fixkörper. Finden Sie für jedes $U \subset G$ ein $\beta \in \mathbb{C}$ mit $E^U = \mathbb{Q}(\beta)$.

(6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Herbst 2008**	**63911** 63911-2008H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und multiplikativer Gruppe $\mathbb{F}_p^*$.

a) Sei $p > 2$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i) -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.
   ii) Das Polynom $X^2 + 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$.
   iii) In $\mathbb{F}_p^*$ gibt es ein Element der Ordnung 4.
   iv) $p \equiv 1 \mod 4$.

b) Sei $p > 3$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i) -3 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.
   ii) Das Polynom $X^2 + X + 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$.
   iii) In $\mathbb{F}_p^*$ gibt es ein Element der Ordnung 3.
   iv) $p \equiv 1 \mod 3$.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine endliche Gruppe.

a) Sei $Z(G)$ das Zentrum von G. Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

b) Es operiere G transitiv auf einer Menge M mit $|M| > 2$. Zeigen Sie, dass es ein $g \in G$ gibt mit $gm \neq m$ für alle $m \in M$.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $P(T) := T^4 + 1 \in \mathbb{Z}[T]$.

a) Zerlegen Sie P im Ring $\mathbb{R}[T]$ in irreduzible Faktoren.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von P. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ eine abelsche Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist und geben Sie den Isomorphie-Typ ihrer Galoisgruppe an.

c) Geben Sie alle Teilkörper $E \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $[E : \mathbb{Q}] = 2$ explizit als $E = \mathbb{Q}(\beta)$ an.

(8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p[X]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.

a) Sei $\tau : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p[X]$ der durch $X \longmapsto X+1$ gegebene Ringisomorphismus. Zeigen Sie, dass τ die Ordnung p hat und dass jedes nicht konstante τ-invariante Polynom aus $\mathbb{F}_p[X]$ mindestens den Grad p hat.

b) Zeigen Sie, dass $X^p - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist (etwa durch Operation von τ auf einer Primfaktorzerlegung von $X^p - X - 1$).

(8 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei S_n die Gruppe der Permutationen von $n \geq 1$ Elementen. Für welche $1 \leq j \in \mathbb{N}$ gibt es Elemente der Ordnung j in S_n und $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$. Der Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ sei für $n \in \mathbb{Z}$ durch $\varphi(n) = (n \bmod 9, n \bmod 35, n \bmod 49)$ gegeben.

Geben Sie eine zyklische Gruppe H an und einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \longrightarrow H$, so dass ψ einen Isomorphismus $G/\text{im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} H$ induziert (hier: $\text{im}(\varphi) =$ Bild von φ).

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $L/\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung vom Grad 3. Sei $\alpha \in L$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie:

a) Es ist α Nullstelle eines Polynoms $f_\alpha(X) = X^3 + aX^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[X]$, für das $b \neq a^2/3$ gilt.

b) Ist $\beta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f_\alpha(X)$, so gilt $\beta \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f(X) = X^5 - X - \frac{1}{16} \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) $f(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X)$ hat genau drei reelle Nullstellen.

c) Die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ besitzt eine Einbettung in die Gruppe S_5 der Permutationen von 5 Elementen und enthält dann eine Transposition.

(6 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

R sei ein endlicher kommutativer Ring. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt mit $r^n = 1$.

b) $r \in R$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt mit $r^n = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

G sei eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$, und P_n bezeichne die von der Menge $\{g^n; g \in G\}$ erzeugte Untergruppe in G. Zeigen Sie:

a) P_n ist ein Normalteiler in G.

b) Für jeden Normalteiler N in G gilt: Es ist $P_n \subseteq N$ genau dann, wenn $y^n = 1$ für alle Nebenklassen $y \in G/N$ ist.

c) Die Kommutatorgruppe G' von G ist Untergruppe von P_2.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

G bezeichne eine Gruppe der Ordnung $p^2 q$, wobei p und q Primzahlen mit $p < q$ sind. Zeigen Sie:

a) Ist G einfach, so folgt mit dem Satz von Sylow: $q = p + 1$.

b) G ist nicht einfach.

c) Frage: Ist G auch dann nicht einfach, wenn $p = q$ ist?

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

p sei eine Primzahl, $\alpha := \sqrt[p]{2} \in \mathbb{R}$ und $\zeta := e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass der Grad von α über $\mathbb{Q}$ gleich p ist, und geben Sie das Minimalpolynom P von α über $\mathbb{Q}$ an.

b) Zeigen Sie, dass $L := \mathbb{Q}[\alpha, \zeta]$ der Zerfällungskörper von P ist. Geben Sie den Grad von ζ über $\mathbb{Q}$ an und beweisen Sie:
$$[L : \mathbb{Q}] = p(p-1).$$

c) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe der Erweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ isomorph ist zur Gruppe der bijektiven Abbildungen
$$\tau_{a,b} : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p, \quad \tau_{a,b}(x) := ax + b \qquad (a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p)$$
des Körpers $\mathbb{F}_p$.

(8 Punkte)