Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________	**Frühjahr**	
Kennwort: ________	**2000**	**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ______		63911-2000F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Weisen Sie für eine Primzahl p die Äquivalenz folgender Aussagen nach:

i) $f(X) = X^2 + 2X + 2$ ist irreduzibel über dem Körper mit p^3 Elementen

ii) $p \equiv 3 \mod 4$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Untersuchen Sie, für welche Primzahlen q mit $q \equiv 2 \mod 3$ jede Gruppe der Ordnung $3q$ zyklisch ist.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Ideale, der Primideale, der Einheiten, der Nullteiler und der nilpotenten Elemente im Ring $\mathbb{Z}/2000\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wobei d die quadratfreien ganzen Zahlen ungleich 1 durchlaufe, sind genau alle quadratischen Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$.

ii) Sind $d_1, \ldots, d_n$ paarweise teilerfremde, quadratfreie ganze Zahlen ungleich 1, so ist $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$ eine über $\mathbb{Q}$ galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

iii) Die Quadratwurzeln von endlich vielen paarweise verschiedenen Primzahlen sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Man entscheide, für welche $n = 2, 3, 4$ die symmetrische Gruppe S_n eine nichttriviale normale Sylowuntergruppe besitzt.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Sei k ein Körper, X eine Unbestimmte über k und $f \in k[X]$ vom Grad $n > 0$. Sei $u := X + (f)$ in $k[X]/(f)$.

a) Man zeige: Jedes Element von $k[u] = k[X]/(f)$ lässt sich eindeutig in der Form

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}$$

mit $a_i \in k$ schreiben.

b) Man zeige: $k[u]$ besitzt genau dann nilpotente Elemente $\neq 0$, wenn $f = g^2 h$ in $k[X]$ mit $\deg g > 0$ gilt.

c) Sei speziell $k = \mathbb{Q}$ und $f = X^3 + 3X - 2$. Man zeige, dass $k[u]$ ein Körper ist und stelle das Element

$$(u^2 + 1)^{-1}$$

als Polynom vom Grad ≤ 2 in u über $\mathbb{Q}$ dar.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

a) Man bestimme ein primitives Element für die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$.

b) Seien x und y Unbestimmte über dem Körper $\mathbb{F}_p$ von p Elementen. Man zeige: Die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p(x, y)/\mathbb{F}_p(x^p, y^p)$ besitzt kein primitives Element.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum mit der Basis $\{e_1, e_2\}$ über einem Körper K und R die Menge der K-linearen Abbildungen $f: V \to V$ mit $f(e_1) = \alpha e_1$ und $f(e_2) = \beta e_1 + \gamma e_2$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Man zeige:

a) R ist ein Ring und V besitzt als R-Modul einen von 0 und V verschiedenen Untermodul.

b) Die Menge $\mathrm{End}_R(V)$ der R-linearen Abbildungen des R-Moduls V in sich ist ein Körper.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Bestimmen Sie den Isomorphietyp der primen Restklassengruppe modulo 360, und geben Sie hierin explizit ein Element $n + 360\mathbb{Z}$ maximaler Ordnung an.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler, dessen Ordnung gleich dem kleinsten Primteiler ihrer Ordnung ist, ein nichttriviales Zentrum hat.
(Hinweis: Man betrachte die Operation der Gruppe auf dem Normalteiler durch Konjugation.)

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Sei $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

a) Zeigen Sie, dass $\alpha = \xi + \xi^{-1}$ einer normierten quadratischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ genügt.

b) Stellen Sie α^{-1} als Polynom in α dar und zeigen Sie $0 < \alpha < 1$.

Aufgabe 4: (9 Punkte)

Sei p prim und $f(x) = x^p - a \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe von $f(x)$ über $\mathbb{Q}$ isomorph ist zu der Gruppe der Transformationen des Primkörpers $\mathbb{F}_p$ von der Form $y \mapsto ky + l$ mit $k, l \in \mathbb{F}_p$, $k \neq 0$.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: __________ Kennwort: __________ Arbeitsplatz-Nr.: _______	**Herbst** **2000**	**63911** 63911 - 2000H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit 2001 Elementen. Zeigen Sie:

a) Die p-Sylowgruppen von G sind für $p = 23$ und $p = 29$ normal.

b) Auch die 3-Sylowgruppe von G ist normal.

c) Die Gruppe G ist zyklisch.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Seien a, b, c positive natürliche Zahlen. Man zeige:

a) Das Polynom $X^a + Y^b$ ist im Polynomring $\mathbb{C}[X, Y]$ durch kein Quadrat eines Primpolynoms teilbar.

b) Das Polynom $X^a + Y^b + Z^c$ ist irreduzibel in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Sei $K = \mathbb{F}_{2^{2000}}$ der Körper mit 2^{2000} Elementen.

a) Wie viele Teilkörper besitzt K?

b) Wie viele erzeugende Elemente hat die Erweiterung $K|\mathbb{F}_2$? [Hinweis: Die bei der Berechnung auftretenden Potenzen von 2 müssen nicht "ausgerechnet" werden.]

Aufgabe 4: (7 Punkte)

a) Man zeige, dass das Polynom $f = X^{1999} - 2000$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Man bestimme die Ordnung der Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Seien K ein Körper mit 15625 Elementen und G seine Automorphismengruppe. Wie viele und wie große Bahnen hat G in K?

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Wie viele Elemente x mit der Eigenschaft $x^2 = x$ hat der Ring $\mathbb{Z}/15015\mathbb{Z}$? Geben Sie vier solche Elemente explizit an.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

a) Sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{F}_{p^2}$ mit p^2 Elementen eine primitive 8-te Einheitswurzel enthält.

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel und über jedem endlichen Körper reduzibel ist.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung

$$\alpha^4 + 2\alpha^3 + 5\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0.$$

a) Seien $\beta := 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 9\alpha + 4$ und $\gamma := \alpha - \beta$. Zeigen Sie, dass β das Minimalpolynom $X^2 + 1$ und γ das Minimalpolynom $X^2 + X + 1$ über $\mathbb{Q}$ hat.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$ galoisch ist, und bestimmen Sie die Galoisgruppe.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

a) Geben Sie die Definitionen der Begriffe "Normalteiler" und "auflösbare Gruppe" an.

b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 100. Zeigen Sie:
(i) G ist auflösbar. (ii) Hat G einen Normalteiler der Ordnung 4, so ist G abelsch. (Es darf verwendet werden, dass Gruppen der Ordnung p^2 abelsch sind, wenn p eine Primzahl ist.)

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Sei P der Polynomring über $\mathbb{Q}$ in den Unbestimmten X, Y und Z und $f = X^a + Y^b \cdot Z^c \in P$ mit positiven, teilerfremden, ganzen Zahlen a, b, c.
Zeigen Sie:

a) Es gibt ganze Zahlen α, β und γ, so dass

$$2^{\alpha a} \cdot f(2^{-\alpha} \cdot X, 2^{\beta} \cdot Y, 2^{\gamma} \cdot Z) = X^a + 2Y^b \cdot Z^c$$

b) f ist in P irreduzibel.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Sei k ein endlicher Körper und K/k eine algebraische Körpererweiterung. f und g seien irreduzible Polynome in $K[X]$ vom gleichen Grad. Zeigen Sie, dass die Körper $K[X]/(f)$ und $K[X]/(g)$ isomorph sind. (Anleitung: Nehmen Sie zunächst an, dass K ebenfalls endlich ist, und führen Sie den allgemeinen Fall darauf zurück.)

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Sei $n > 2$ eine ganze Zahl und φ die Eulersche phi-Funktion.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{n}]/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad $\frac{\varphi(n)}{2}$ ist.

b) Bestimmen Sie das neunte Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\cos \frac{2\pi}{9}$ über $\mathbb{Q}$.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________ Kennwort: ____________ Arbeitsplatz-Nr.: _______	**Frühjahr** **2001**	**63911** 63911-2001F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 31 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (7 P)

Bestimmen Sie alle Tripel (a, b, c) paarweise verschiedener natürlicher Zahlen, derart, dass jede dieser drei Zahlen die Summe der beiden anderen teilt.

Aufgabe 2 (9 P)

Eine Gruppe heißt *torsionsfrei*, wenn nur das neutrale Element endliche Ordnung besitzt. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe $\neq 0$ heißt *vom Rang* 1, wenn es für je zwei Elemente x, y dieser Gruppe ganze Zahlen a, b, nicht beide gleich 0, gibt derart, dass $ax + by = 0$, z. B. ist die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen torsionsfrei vom Rang 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Torsionsfreie abelsche Gruppen vom Rang 1 lassen sich in $\mathbb{Q}$ einbetten.
(2) Torsionsfreie *lokal zyklische Gruppen*, d. h. alle endlich erzeugten Untergruppen sind zyklisch, lassen sich in $\mathbb{Q}$ einbetten.
(3) Jede Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist lokal zyklisch.

Aufgabe 3 (6 P)

Für ein Element r eines assoziativen Ringes R mit 1, das ein Rechtsinverses s in R besitzt, sind äquivalent:

(1) r hat mindestens zwei verschiedene Rechtsinverse in R;
(2) r ist ein Linksnullteiler in R;
(3) r hat kein Linksinverses in R.

Aufgabe 4 (9 P)

Bestimmen Sie alle Teilkörper eines Zerfällungskörpers E des Polynoms $(x^3 - 3x + 1)(x^2 + 2)$ über $\mathbb{Q}$ und ein primitives Element von $E/\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Sei N die von $n_1 = (4,3,2,1)$, $n_2 = (1,2,3,4)$ und $n_3 = (-1,-1,-2,2)$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}^4$. Man schreibe die Gruppe $\mathbb{Z}^4/N$ als Produkt zyklischer Gruppen.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 63.

(i) Man zeige, dass G einen nichttrivialen Normalteiler hat.

(II) Man konstruiere zwei nicht isomorphe nicht abelsche Gruppen der Ordnung 63 (als semidirektes Produkt).

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei $K/\mathbb{Q}$ eine quadratische Erweiterung. Sei $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K)$ der Ring der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildungen von K nach K. Man definiere $T:K\to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K)$ durch $T(a)(b)=ab$, $a, b \in K$.

(i) Man zeige, dass T ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

(ii) Sei $Z(T(K))$ der Zentralisator von $T(K)$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K)$. Man zeige, dass $Z(T(K))=T(K)$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen und sei $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu q. Sei K ein Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_q$. Man zeige $[K:\mathbb{F}_q] = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n \text{ teilt } q^k - 1\}$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Seien S_2 respektive S_3 die Gruppen der Permutationen von $\{1,2\}$ resp. $\{1,2,3\}$. Man zeige, dass es eine Galoissche Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ gibt mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_2 \times S_3$.

-4-

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
$K/\mathbb{Q}$ sei eine endliche Körpererweiterung vom Grad n. Zeigen Sie, **dass** es genau n verschiedene Körpermonomorphismen von K nach $\mathbb{C}$ gibt und **dass** die Anzahl s derjenigen mit nicht-reellem Bild gerade ist. Mit $n = r + s$ weisen Sie $r = 0$ oder $s = 0$ für den Fall nach, **dass** $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und geben Sie Beispiele für beide Fälle.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen Sie $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ für eine p-Sylowuntergruppe P der endlichen Gruppe G. ($N_G(U)$ ist der Normalisator der Untergruppe U von G.)

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Der Körper k habe Charakteristik $p \neq 0$; K sei der Zerfällungskörper eines Polynoms aus $k[x]$. Zeigen Sie, **dass** der separable **Abschluss** K_{sep} von k in K der Zerfällungskörper eines separablen Polynoms aus $k[x]$ ist.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei k eine positive Zahl und sei $R := M_k(\mathbb{Z})$ der Ring der ganzzahligen $k \times k$-Matrizen. Zeigen Sie:
a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ ist nR ein zweiseitiges Ideal in R.
b) Jedes zweiseitige Ideal von R ist von der in a) genannten Art.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Welches sind die Galoisgruppen der Polynome $x^3 - 3x + 3$, $x^3 - 1$, $x^3 - 3x + 1$ über $\mathbb{Q}$?

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________	Herbst	63911
Kennwort: ____________	2001	
Arbeitsplatz-Nr.: ________		63911-2001H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung mit einer zur alternierenden Gruppe A_4 isomorphen Galoisgruppe.

a) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl z_n der Zwischenkörper Z von L/K mit $[Z : K] = n$.

b) Wie viele Zwischenkörper Z von L/K gibt es, für die Z/K eine Galoiserweiterung ist?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei G eine freie abelsche Gruppe mit der Basis $(X_1, ..., X_n)$.

a) Zeigen Sie, dass jede Basis von G aus genau n Elementen besteht.

b) Seien $Y_i = \sum_{k=1}^{n} z_{ik} X_k$ $(z_{ik} \in \mathbb{Z}, i, k = 1, ..., n)$ Elemente aus G und $A = [z_{ik}]_{i,k=1,...,n}$ die zugehörige Koeffizientenmatrix. Ferner sei H die von $Y_1, ..., Y_n$ erzeugte Untergruppe von G. Zeigen Sie: Ist $\det A \neq 0$, so besitzt G/H die Ordnung $|\det A|$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Im Polynomring $K[X, Y]$ in den Unbestimmten X, Y über einem Körper K sei I das von X^4, Y^4, X^3Y, XY^3 erzeugte Ideal und $R := K[X, Y]/I$. Ferner seien $\zeta := X + I$, $\eta := Y + I$ die Restklassen von X bzw. Y in R.

a) Welche Dimension besitzt R als K-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Aussage.

b) Welche Dimension besitzt der Sockel $S := \{f \in R \mid \zeta f = \eta f = 0\}$ von R als K-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Bestimmen Sie alle Primideale von R.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei L/K eine Körpererweiterung. Eine K-lineare Abbildung $d : L \to L$ heißt Derivation von L/K, wenn für alle $a, b \in$ L die Produktregel $d(ab) = ad(b) + bd(a)$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass für ein solches d die folgenden Aussagen richtig sind:

a) $d(a) = 0$ für alle $a \in K$.

b) Ist $f \in K[X]$ ein Polynom und $a \in L$, so gilt $d(f(a)) = f'(a)da$ mit der Ableitung f' von f.

c) Z := ker $d := \{a \in L \mid d(a) = 0\}$ ist ein Zwischenkörper von L/K.

d) Ist $a \in L$ separabel algebraisch über Z, so ist $a \in Z$.

e) Ist L ein endlicher Körper und K sein Primkörper, so ist d die Nullabbildung.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 31 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Für $3 \leq n$ sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, es sei H die Quaternionengruppe der Ordnung 8, und S_3 sei die symmetrische Gruppe auf 3 Elementen.

a) Zeigen Sie: Die drei Gruppen D_8, $D_4 \times \mathbb{Z}_2$ und $H \times \mathbb{Z}_2$ sind paarweise nicht isomorph.

b) Bestimmen Sie für jede der drei Gruppen aus a) die Anzahl der zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 und geben Sie jeweils die Menge dieser Untergruppen an.

c) Zeigen Sie: Die Gruppen D_6 und $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ sind isomorph.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachtet sei folgendes System von zwei Kongruenzen in $\mathbb{Q}[X]$:

$$\begin{aligned} f &\equiv X-1 \mod X^2-1 \\ f &\equiv X+1 \mod X^2+X+1 \ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine konkrete Lösung und die Menge aller Lösungen des Systems.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring mit 1.

a) Sei $a \in R$. Man beschreibe - mit Beweis - das Hauptideal (a), d.h. das kleinste beidseitige Ideal von R, das a enthält.

b) Sei nun $\mathcal{I} \subsetneq R$ ein beidseitiges Ideal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

aa) Für alle beidseitigen Ideale $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus R gilt: $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ oder $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$.

bb) Für alle $a, b \in R$ gilt: $aRb \subseteq \mathcal{I} \implies a \in \mathcal{I}$ oder $b \in \mathcal{I}$.

cc) Für alle Linksideale $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus R gilt: $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} \implies \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ oder $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Sei p eine Primzahl. Man gebe - mit entsprechendem Beweis - eine komplexe Zahl z an, so dass $\mathbb{Q}(z)$ eine Galoiserweiterung über $\mathbb{Q}$ vom Grade $p-1$ ist.

b) Man gebe - mit entsprechendem Beweis - eine komplexe Zahl z an, so dass $\mathbb{Q}(z)$ eine Galoiserweiterung vom Grade 500 über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome 2. und 3. Grades über $\mathbb{F}_2$.

b) Zeigen Sie: $f = X^6 + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$.

c) Sei $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$, wo α eine Nullstelle des f aus b) ist. Geben Sie alle Körper L mit $\mathbb{F}_2 \subsetneq L \subsetneq K$ an, indem Sie explizit ein $z \in K$ mit $L = \mathbb{F}_2(z)$ bestimmen.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie: Es gibt keine ganzen Zahlen x und y mit $x^2 + 3y^2 = 2001$.

b) Bestimmen Sie die Isomorphieklassen der Gruppen der Ordnung 2001.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) G sei eine endliche abelsche Gruppe, p das Produkt aller Elemente von G.
Zeigen Sie:

$$p = \begin{cases} 1 & \text{falls G kein oder mehr als ein Element der Ordnung 2 hat} \\ a & \text{sonst, wobei a dann das einzige Element der Ordnung 2 von G ist.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \neq 4$: n teilt die Zahl $((n - 1)!)^2 + (n - 1)!$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{D}$ aller Polynome in x mit rationalen Koeffizienten seien die Operation "Addition" $\oplus$ und "Multiplikation" $\odot$ wie folgt definiert:

$$f(x) \oplus g(x) = f(x) + g(x),$$

$$f(x) \odot g(x) = \int_0^x f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0).$$

a) Zeigen Sie: Auch mit diesen Operationen ist $\mathbb{D}$ ein assoziativer Ring mit Einselelement.

b) Bestimmen Sie die idempotenten Elemente von $\mathbb{D}$, d.h. die Elemente mit $f \odot f = f$.

c) Geben Sie $\mathbb{D}$ als direkte Summe von Teilringen an und beschreiben Sie einen der beiden Summanden.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{2+\sqrt[3]{2}} \in \mathbb{R}$ die positive Quadratwurzel von $2+\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f(x) von α über $\mathbb{Q}$ und den Grad $|\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}|$.

b) Geben Sie alle Nullstellen von f(x) in $\mathbb{C}$ an. Ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von f(x)?

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie: Es gibt kein Polynom $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ so dass $P(7) = 5$, $P(9) = 4$ gilt.

b) Zeigen Sie für $a, b \geq 3$, $a, b \in \mathbb{Z}$:

$x(x-3)(x-a)(x-b)+1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________	**Frühjahr**	**63911**
Kennwort: ____________	**2002**	
Arbeitsplatz-Nr.: ________		63911-2002F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $K(t)$ der Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten über einem Körper K, und sei $f \in K(t)$ nicht konstant. Schreiben Sie $f = \frac{g}{h}$ $(g, h \in K[t], \operatorname{ggT}(g, h) = 1)$.

Zeigen Sie:

a) Das Polynom $h(X) \cdot f - g(X) \in K(f)\,[X]$ ist irreduzibel.

b) Genau dann ist $K(f) = K(t)$, wenn f von der Form

$$f = \frac{at+b}{ct+d} \quad (a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0) \text{ ist.}$$

c) Die Automorphismengruppe von $K(t)$ über K ist isomorph zur Restklassengruppe

$$\mathrm{GL}(2, K) \,/\, \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \neq 0 \right\}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei Ω der algebraische Abschluss des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, und seien K und L endliche Teilkörper von Ω mit p^r beziehungsweise p^s Elementen. α sei ein primitives Element von K über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) r und s sind teilerfremd.

b) Das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist in $L[X]$ irreduzibel.

c) $K \cap L = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei a ein Element der Ordnung $d > 1$ in der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und G die von den Abbildungen $\mu : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(x \mapsto ax)$ und $\alpha : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(x \mapsto x + 1)$ erzeugte Untergruppe der Permutationsgruppe von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) G ist nicht abelsch.

b) Jedes $g \in G$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$g = \mu^r \alpha^s \quad (0 \le r < d, 0 \le s < p)$$

c) G ist auflösbar.

d) Es gibt eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 555.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{Z}[X]$ das von den Polynomen $X^4 + 3X^3 + X$ und $X^5 - 9X^3 + X^2 - 3X + 3$ erzeugte Ideal.

a) Zeigen Sie, dass $3 \in I$ ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $R := \mathbb{Z}[X]/I$.

c) Zeigen Sie, dass R eine zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ isomorphe Einheitengruppe hat.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Seien alle a_i ungerade. Man zeige, dass $f(X)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei S_p die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, ..., p\}$.

(i) Man gebe die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p an.

(ii) Sei P eine p-Sylowuntergruppe von S_p. Man gebe die Anzahl der Elemente des Normalisators $N(P)$ von P in S_p an.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive 7-te Einheitswurzel.

(i) Man bestimme α bzw. β in $\mathbb{Q}(\xi)$ so, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$ ist.

(ii) Man bestimme jeweils das Minimalpolynom von α und von β.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei Mat $(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{F}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(i) Man zeige, dass es ein $\alpha \in$ Mat $(2 \times 2), \mathbb{F}_3)$ gibt mit Ordnung 8 bezüglich der Multiplikation.

(ii) Man zeige, dass $\{0, 1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^7\}$ ein Körper ist mit den von Mat $(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ induzierten Operationen.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ des Zerfällungskörpers von $\varphi(X) = X^4 + 6X^2 + 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[[T]]$ der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

a) Sei $m \subseteq R$ ein maximales Ideal in R. Zeigen Sie: $m \cap \mathbb{Z}$ ist ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$.

b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten $R^{\times}$.

c) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in R.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index n. Durch die Wirkung von G auf G/U wird ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to S_n$ definiert (dies muss nicht gezeigt werden).

a) Zeigen Sie: $\ker(\varphi) \subseteq U$.

b) Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$ und $[G : U] = p$. Zeigen Sie: U ist normal in G.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von

$$f(x) = x^5 + x^4 + 14x^3 + 14x^2 + 28x + 28$$

über den Polynomringen $\mathbf{F}_2[x]$, $\mathbf{F}_3[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$. Bestimmen Sie in diesen drei Fällen jeweils die Ordnung der Galoisgruppe von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Antwort:

a) Kann man ein regelmäßiges 19-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

b) Ist $x^2 + x + 11 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 370368)$ lösbar?

c) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?

d) Sei $f(x) = x^{19} + 19x + 57 \in \mathbb{Q}[x]$. Ist die Restklasse von $x^{18} + 2$ in $\mathbb{Q}[x]/(f)$ invertierbar?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es sei p eine Primzahl.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller 3×3-Matrizen über $\mathbb{Z}$

$$M = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in p\mathbb{Z} \text{ falls } i < j\}$$

ein Ring (mit Einselement) ist.

b) Geben Sie drei Ideale I von M an mit $M / I \simeq \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst** **2002**	**63911** 63911-2002H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $p^n, n \geq 2$. $C(g)$ sei der Zentralisator eines Elements $g \in G$. Zeigen Sie:

$$|C(g)| > p.$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien p eine Primzahl, $1 \leq r \in \mathbb{N}$ und $b = p^r$. Seien weiter A der Faktoring $A = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ und A^* die Gruppe der Einheiten von A. Die Gruppe A^* operiert auf A mittels der Multiplikation $A^* \times A \to A,\ (a,x) \mapsto a \cdot x$.

Bestimmen Sie die Bahnen dieser Operation, die Anzahl dieser Bahnen und ihre jeweilige Ordnung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Zerlegen Sie das Polynom $f := X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren.

b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper Z von f über $\mathbb{Q}$ und $[Z:\mathbb{Q}]$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

K sei ein Körper, $K[T]$ der Polynomring in einer Variablen T und $K[X,Y]$ der Polynomring in den Variablen X, Y über K. Für zwei fest gewählte f, $g \in K[T]$ sei

$$I := \{F \in K[X,Y] \mid F(f,g) = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass I ein Primideal von $K[X,Y]$ ist.

b) Unter welcher Bedingung für f und g ist I ein maximales Ideal von $K[X,Y]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Zu $f \in \mathbb{Q}[x]$ sei G_f die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$. Geben Sie – mit Begründung – jeweils ein Beispiel für ein f mit folgender Eigenschaft an:

a) $G_f \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

b) $G_f \cong S_5$ (symmetrische Gruppe auf fünf Elementen)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Geben Sie eine natürliche Zahl n an, so dass $n!$ im Dezimalsystem mit genau 2002 Nullen endet!

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Zeigen Sie: Gruppen der Ordnung 2002 haben einen Normalteiler vom Index 2.
b) Zeigen Sie: Eine Gruppe der Ordnung 1001 ist zyklisch.
c) Zeigen Sie: Es gibt genau 8 Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 2002.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Ist $\zeta = e^{\pi i/1001}$ eine primitive 2002-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, so ist $\varepsilon = 1 + \zeta + \zeta^2$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Anleitung: Stellen Sie $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\zeta - 1}{\zeta^3 - 1}$ als Summe von Potenzen von ζ dar!

b) Es gibt keinen Integritätsring der Charakteristik Null, der genau 2002 Einheiten besitzt.
c) Ist R ein Integritätsring mit genau 2002 Einheiten, so hat R die Charakteristik 2003 (ist Primzahl!).
d) Geben Sie zwei nichtisomorphe Integritätsringe mit genau 2002 Einheiten an!

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Für eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ sei G_q die Galoisgruppe des Polynoms

$$f_q(x) = x^5 - 2002x + q$$

über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Zeigen Sie:

a) Für unendlich viele $q \in \mathbb{Q}$ *ist* $|G_q| = 120$.

b) Für unendlich viele $q \in \mathbb{Q}$ *ist* $|G_q|$ ein Teiler von 24.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ≥ 5 derart, dass auch $q := p + 2$ eine Primzahl ist, wie z.B. $p = 17$ und $q = 19$.

a) Es sei G eine Gruppe der Ordnung $p^2 \cdot q^2$. Bestimmen Sie die Anzahlen und Ordnungen der Sylow-Untergruppen von G.

b) Bestimmen Sie alle Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung $104329 = 323^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie

a) alle Lösungen der Gleichung $X^4 = 81$ im Körper $\mathbb{F}_{167}$;

b) alle natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n \leq 2003$ und

$$n^4 \equiv 81 \mod 2004 \qquad \text{[es ist } 2004 = 167 \cdot 12]$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Welche der folgenden drei Ideale in $\mathbb{C}[X, Y]$

$$I_1 = (X \cdot Y) \quad , \quad I_2 = (X + Y) \quad , \quad I_3 = (X, Y)$$

sind Primideale bzw. sogar maximale Ideale?

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Das Polynom

$$f(X) = X^6 + 3X^3 + 3$$

habe die Nullstelle $a \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)$ die dritte Einheitswurzel

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

enthält.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)$ nicht normal über $\mathbb{Q}$ ist.

d) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von f über $\mathbb{Q}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen seien die Polynome

$$p(X) = X^3 + X + 1 \quad \text{und} \quad q(X) = X^3 + X^2 + 1$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) p und q sind die einzigen irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad 3.

b) Ist Z der Zerfällungskörper von p über $\mathbb{F}_2$ und $a \in Z$ eine Nullstelle von p, so sind a^2 und a^4 die beiden anderen Nullstellen von p.

c) Z besteht genau aus den Elementen $0, 1$, den drei Nullstellen a, a^2, a^4 von p und den drei Nullstellen a^3, a^5, a^6 von q in Z.