Mögliche Aufgabentypen zum Thema Sylowsätze

geg. eine Gruppe G der Ordnung n

(1) zeige: G ist nicht einfach

Vorgehensweise: Zeige (meist mit dem 3. Sylowsatz), dass die Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen von G größer als 1 ist, und dass $1 < |P| < |G|$ für jede solche p-Sylowgruppe gilt.

(2) zeige: G ist auflösbar

Vorgehensweise: Weise wie bei (1) die Existenz eines nichttriv. Normalteilers N nach. Verwende die Äquivalenz

G auflösbar $\Longleftrightarrow$ G/N, N beide auflösb.

Falls G/N bzw. N nicht bereits abelsch (oder sogar zyklisch) ist, wiederhole den Vorgang mit G/N bzw. N.

(3) G ist ist abelsch / G ist zyklisch

häufige Vorgehensweise: Zeige, dass es für zwei verschiedene Primzahlen p, q

(3)
glei
oper
Oft

normale Sylowgruppen P, Q gibt. Weise nach, dass G ein inneres direktes Produkt von P und Q ist. Schließe daraus $G \cong P \times Q$. Wenn gezeigt werden kann, dass P und Q beide abelsch sind, dann ist auch $P \times Q$ abelsch (P, Q zyklisch $\xRightarrow{\text{Chin. RS}}$ $P \times Q$ zyklisch), und dasselbe gilt auch für G. (beachte: Primzahlordnung $\Rightarrow$ zyklisch, Primzahlquadratordn. $\Rightarrow$ abelsch, Primzahlpotenzordn. $\Rightarrow$ auflösbar. Achtung: Das direkte Produkt zweier zyklischer Gruppen ist im Allgemeinen nicht zyklisch. Gegenbsp.: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

zur Bestimmung der Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen:

(1) 3. Sylowsatz: $\nu_p \mid m$, $\nu_p \equiv 1 \mod p$, falls $|G| = m p^r$ mit $m \in \mathbb{N}$, $p \nmid m$, $r \in \mathbb{N}_0$

Bestimmung der Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen:

(1) 3. Sylowsatz: $\nu_p \mid m$, $\nu_p \equiv 1 \bmod p$, falls $|G| = mp^r$ mit $m \in \mathbb{N}$, $p \nmid m$, $r \in \mathbb{N}_0$

(2) Elemente zählen: Wenn die letzte verbleibende Möglichkeit (abgesehen davon, dass $\nu_p = 1$ für alle Primzahlen p gilt) darin besteht, dass $\nu_p > 1$ und $\nu_q > 1$ für zwei verschiedene Primzahlen zugleich gilt, dann kann man versuchen, die Anzahl der Elemente der Gruppen von p-Potenz- und q-Potenzordnung nach unten abzuschätzen und so einen Widerspruch zu erhalten.
(Beispiele: F15T1A3, es gibt keine einfache Gruppe der Ordn. 12 bzw. 56)

(3) Wenn schon bekannt ist, dass ν_p „klein" (aber nicht notw. gleich 1) ist, kann man G auf der Menge X der p-Sylowgruppen operieren lassen. Man erhält dann einen Hom. $\phi: G \to \mathrm{Per}(X)$. Oft hilft $N = \ker(\phi) \trianglelefteq G$ weiter. (Bsp. Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 300.)

(4) Manchmal ist es auch sinnvoll, die Sylow-sätze auf eine Unter- oder eine Faktor-gruppe von G anzuwenden.

(5) Es gilt $\nu_p = (G : N_G(P))$, auf-grund des Zusammenhangs $(G : G_x) = |G(x)|$ bei beliebigen Gruppenoperationen). Wenn Informationen über den Normalisator $N_G(P)$ verfügbar sind, dann können diese also genutzt werden.

la

$\forall k$

Dies

$\in \mathbb{F}_p$

gilt

$N_G($

Sei nu

$3 \cdot 2 \cdot 2$

es drei

Mögl f

3-Sylow

<u>F25T1A1</u>: geg: p Primzahl, $G = GL_2(\mathbb{F}_p)$

bereits erledigt: (a) $|G| = p(p-1)^2(p+1)$

(b) $\operatorname{ord}\left(\begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 1\\ \bar 0 & \bar 1\end{pmatrix}\right) = p$ [Übzg: F21T1A4]

(c) Es gibt mehr als eine p-Sylowgr. in G.

(d) Sei $P = \left\langle \begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 1\\ \bar 0 & \bar 1\end{pmatrix} \right\rangle$. Zeigen Sie, dass der Normalisator $N_G(P)$ aus den oberen Dreiecksmatrizen in G besteht. Folgern Sie daraus, dass es im Fall $p=3$ genau vier 3-Sylowgruppen in G gibt.

Nach Def. des Normalisators gilt $N_G(P)$
$= \{A \in G \mid APA^{-1} = P\} = \{A \in G \mid AP = PA\}$.

F

di

A

A

$\forall k \in$

$\Longleftrightarrow \forall k$

Liegt

dann B

weil so

gleich

$GL_2(\mathbb{F}_p)$

$+1)$

$1A4]$

in G.

e, dass der

Dreiecks-

daraus, dass

gruppen in G

$N_G(P)$

$G \mid AP = PA\}$

bereits bekannt: $P = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbb{F}_p \right\}$

Für jedes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ gilt somit

die Äquivalenz $A \in N_G(P) \iff$

$AP = PA \iff \forall k \in \mathbb{F}_p \; \exists l \in \mathbb{F}_p :$

$A \begin{pmatrix} \bar{1} & k \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & l \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} A \iff$

$\forall k \in \mathbb{F}_p \; \exists l \in \mathbb{F}_p : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & k \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & l \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\iff \forall k \in \mathbb{F}_p : \exists l \in \mathbb{F}_p : \begin{pmatrix} a & ak+b \\ c & ck+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+lc & b+ld \\ c & d \end{pmatrix}$

Liegt A also in $N_G(P)$, dann ist somit $c \neq \bar{0}$ ausgeschlossen, weil sonst $ck+d$ nicht für alle $k \in \mathbb{F}_p$ gleich gleich c sein kann.

Sylows -
Faktor -
), auf
) = $|G(x)|$
n) Wenn
ator $N_G(P)$
se also ge-

Setzen wir umgekehrt $c = \bar{0}$ voraus, dann lautet die Bed. für $A \in N_G(P)$:

$$\forall k \in \mathbb{F}_p \; \exists l \in \mathbb{F}_p : \begin{pmatrix} a & ak+b \\ \bar{0} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+ld \\ \bar{0} & d \end{pmatrix}$$

Dies ist offenbar erfüllt, denn für jedes $k \in \mathbb{F}_p$ kann $l = k$ gewählt werden. Also gilt tatsächlich

$$N_G(P) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{F}_p,\ a, d \in \mathbb{F}_p^* \right\}.$$

Sei nun $p = 3$. Dann gilt $|N_G(P)| = 3 \cdot 2 \cdot 2$, denn wegen $|\mathbb{F}_3| = 3$, $|\mathbb{F}_3^*| = 2$ gibt es drei Wahlmögl. für b und jeweils zwei Mögl. für a und c. Sei ν_3 die Anzahl der 3-Sylowgr. Teil (a) $\Rightarrow |G| = 3 \cdot 2^2 \cdot 4 = 48$

(Die Anwendung des 3. Sylowsatzes führt nicht zum Ziel. Dieser liefert $\nu_3 \mid 16$, also $\nu_3 \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$, und wegen $16 \equiv 4 \equiv 1 \mod 3$ bleiben drei Fälle übrig.)

Allgemein gilt $\nu_p = (G : N_G(P))$, falls p bel. Primzahl, P p-Sylowgr. von G. Hier erhalten wir $\nu_3 = \frac{|G|}{|N_G(P)|} = \frac{48}{12} = 4$. $\square$

F25T2A4 Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$, und es seien U_5, U_5' zwei verschiedene 5-Sylowgruppen von G.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl ν_5 der 5-Sylowgruppen von G.

Laut 3. Sylowsatz gilt $\nu_5 \mid 81 \ (= 3^4)$, also $\nu_5 \in \{1, 3, 9, 27, 81\}$

...grup-

□

...n. 2014.

...alten-

...es

$=2 \cdot 19 \cdot 53$

...ßerdem

$\Rightarrow \nu_{53} = 1$

...ußerdem

$\not\equiv 1 \mod 19$,

1

$= 3^4 5^2$, und es seien U_5, U_5' zwei verschiedene 5-Sylowgruppen von G.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl ν_5 der 5-Sylowgruppen von G.

außerdem $\nu_5 \equiv 1 \mod 5$. $3 \not\equiv 1 \mod 5$, $9 \equiv 4 \not\equiv 1 \mod 5$, $27 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 5$ $\Rightarrow \nu_5 \in \{1, 81\}$. Da es lt. Angabe mehr als eine 5-Sylowgruppe gibt, folgt $\nu_5 = 81$.

(b) Sei $U = \langle U_5 \cup U_5' \rangle$, die von der Teilmenge $U_5 \cup U_5'$ erzeugte Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass $U = G$ gilt.

(Hinweis: Wenn V eine Untergr. mit $U_5 \subsetneq V \subsetneq G$ ist, wieviele 5-Sylowgruppen kann V besitzen?)

Ang. $U \subsetneq G$. Dann gilt auch $U_5 \subsetneq U$, denn U enthält neben U_5 auch noch die 5-Sylowg. U_5', und $U_5' \not\subseteq U_5$. Da U Untergr. von G ist, gilt $|U| \mid |G|$ nach dem Satz von Lagrange, also $|U| = 3^k \cdot 5^l$ mit $0 \le k \le 4$ und $0 \le l \le 2$.

Wegen $U_5 \subseteq U$ und $|U_5| = 2$ gilt $l = 2$.
Da U eine echte Untergp. von G ist, gilt außerdem $k \leq 3$.
Sei nun ν_5' die Anzahl der 5-Sylowgps. von U. 3.-Sylowsatz $\Rightarrow \nu_5' \mid 3^k \xRightarrow{k \leq 3}$ $\nu_5' \in \{1, 3, 9, 27\}$, außerdem $\nu_5' \equiv 1 \mod 5$;
$3, 9, 27 \not\equiv 1 \mod 5 \Rightarrow \nu_5' = 1$ $\lightning$ da U mit U_5 und U_5' mindestens zwei 5-Sylowgruppen enthält.

$\square$

H14T3A1 Sei G eine Gruppe der Ordn. 2014.

Zeigen Sie, dass G einen zyklischen Normalteiler der Ordnung $1007 = 19 \cdot 53$ besitzt

Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgr. von G. 3. Sylowsatz, $|G| = 2 \cdot 19 \cdot 53$

$\nu_{53} \mid 2 \cdot 19 \Rightarrow \nu_{53} \in \{1, 2, 19, 38\}$, außerdem

$\nu_{53} \equiv 1 \ (53)$, $2, 19, 38 \not\equiv 1 \mod 53 \Rightarrow \nu_{53} = 1$

$\nu_{19} \mid 2 \cdot 53 \Rightarrow \nu_{19} \in \{1, 2, 53, 106\}$, außerdem

$\nu_{19} \equiv 1 \mod 19$, $2 \not\equiv 1 \mod 19$, $53 \equiv 15 \not\equiv 1 \mod 19$,

$106 \equiv 30 \equiv 11 \not\equiv 1 \mod 19 \Rightarrow \nu_{19} = 1$

Sei P die einzige 19- und Q die einzige 53-Sylowgruppe. Sei $N = PQ$, das Komplexprodukt. Wegen dem 2. Sylowsatz und $\nu_{19} = \nu_{53} = 1$ gilt $P \trianglelefteq G$ und $Q \trianglelefteq G$, und damit auch $N \trianglelefteq G$.

<u>Beh.</u>: N ist inneres dir. Produkt von P und Q

zu überprüfen (i) $P, Q \trianglelefteq N$

(ii) $P \cap Q = \{e\}$ (iii) $N = PQ$

Aussage (iii) gilt nach Def. von N, und (i) folgt direkt aus $P, Q \subseteq N$ und $P, Q \trianglelefteq G$. Aussage (ii) ist erfüllt, weil $|P| = 19$ und $|Q| = 53$ teilerfremd sind.

(b)

Jede

Grupp

enthal

Ordnung

G mit

Ordnung

p-Sylo

sind. Fo

G genau

Genauso

$\nu_q \cdot (q-1)$

$(\Rightarrow$ Beh.$) \Rightarrow N \cong P \times Q$

$|P|, |Q|$ Primzahlen $\Rightarrow P, Q$ zyklisch $\Rightarrow$ $|P| = 19$, $|Q| = 53$

$P \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z},\ Q \cong \mathbb{Z}/53\mathbb{Z} \Rightarrow N \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$

$\mathrm{ggT}(19, 53) = 1$, Chin. Restsatz $\Rightarrow$

$N \cong \mathbb{Z}/1953\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2014\mathbb{Z} \Rightarrow N$ ist zyklisch

$\square$

<u>H22T3A3</u> Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$. Sei G eine Gruppe der Ordnung pqr. Für $j \in \{p, q, r\}$ sei ν_j jeweils die Anzahl der j-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie:

(a) Hat G keine normale Sylowgruppe, dann gilt $\nu_p \geq q$, $\nu_q \geq r$ und $\nu_r = pq$.

(Übung)

einzige
e, das
lowsatz
d $Q \trianglelefteq G$

von P und Q

$= PQ$
N, und
N und
lt, weil
fend sind.

(b) Zeigen Sie, dass G eine normale Sylowgr. besitzt.

Jede Untergruppe der Ordnung p ist als Gruppe von Primzahlordn. zyklisch und enthält somit $\varphi(p) = p-1$ Elemente der Ordnung p. Umgekehrt ist jedes Element $g \in G$ mit $\operatorname{ord}(g) = p$ in genau einer Untergr. der Ordnung p enthalten, nämlich in $\langle g \rangle$. Da die p-Sylowgr. von G genau die Untergruppen p sind, folgt daraus insgesamt, dass es in G genau $\nu_p \cdot (p-1)$ Elemente der Ordnung p gibt. Genauso zeigt man, dass es in G genau $\nu_q \cdot (q-1)$ Elt. der Ordnung q und genau

$|P| = 19$

...sch $\Rightarrow$ $|Q| = 53$

...$\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

N ist zyklisch

$\square$

...len mit

... Ordnung

... die Anzahl

...gen Sie:

...uppe, dann

... $= pq$.

$\nu_r \cdot (r-1)$ Elt. der Ordnung r gibt.

Insgesamt enthält G also (das Neutralelt. eingerechnet) mind. $(p-1)\nu_p + (q-1)\nu_q + (r-1)\nu_r + 1$ Elemente. Teil (a) $\Longrightarrow$

$$pqr = |G| \geq (p-1)q + (q-1)r + (r-1)pq + 1$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{pqr} \geq \cancel{pq} - q + qr - r + \cancel{pqr} - \cancel{pq} + 1$$

$$\Longleftrightarrow 0 \geq qr - q - r + 1$$

$$\Longleftrightarrow q + r - 1 \geq qr$$

Es ist $p \geq 2, q \geq 3, r \geq 5$

$$q + r - 1 \geq qr \Rightarrow 1 + \frac{r}{q} - \frac{1}{q} \geq r$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{r}{q} \geq r \underset{q \geq 3}{\Rightarrow} 1 + \frac{1}{3} r \geq r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{3} r \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{2}{3} r \Rightarrow r \leq 3/2$$

↯ zu $r \geq 5$