

Sylowsätze

Def. Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, und $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ mit $|G| = m \cdot p^r$, wobei $p \nmid m$ gilt.

Eine Untergruppe U von G heißt

(i) p -Untergruppe, wenn $|U| = p^s$ für ein $s \in \{0, 1, \dots, r\}$ und

(ii) p -Sylowgruppe, wenn $|U| = p^r$ gilt.

Erster Sylowsatz: Sei G eine Gruppe wie oben. Jede p -Untergruppe von G ist in einer p -Sylowgruppe enthalten.

Zweiter Sylowsatz: Je zwei p -Sylowgruppen P, Q von G sind zueinander konjugiert, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $Q = gPg^{-1}$.

Dritter Sylowsatz: Für die Anzahl n_p der p -Sylowgruppen von G gilt
 $n_p \mid m$ und $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Folgerungen aus dem Zweiten Sylowsatz:

- i) Für jede p -Sylowgruppe P gilt die Äquivalenz $P \trianglelefteq G \iff n_p = 1$.
- ii) Je zwei p -Sylowgruppen von G sind isomorph.

Nullte

liche
mit

gruppe
gilt

Bem.:

das
= 12.
Ordnung

Nullter Sylow-Satz: Ist G eine endliche Gruppe und q eine Primzahlpotenz mit $q \mid |G|$, dann besitzt G eine Untergruppe der Ordnung q . Insbesondere gilt $v_p \geq 1$.

Bem.: Für beliebige Teiler von $|G|$ ist das falsch. Beispiel: Es gilt $|A_4| = 12$, aber A_4 hat keine Untergruppe der Ordnung 6.

Erinn

Sei G

innere

wenn

(iii) U

existe

F23T

Isomom

(Es ist

Aufgab

Gruppe

Erinnerung:

Sei G eine Gruppe. Man nennt G ein inneres direktes Produkt von $U, N \leq G$, wenn

- i) $U, N \leq G$ (ii) $U \cap N = \{e\}$
- iii) $UN = G$. Ist dies erfüllt, dann existiert ein Isomorphismus $G \cong U \times N$.

F23T3A3 Bestimmen Sie bes auf

Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 2023
(Es ist $2023 = 7 \cdot 17^2$.) Übung: H15T1A3
H14T3A1

Aufgabe: Wir suchen eine endliche Liste von Gruppen $G_1, \dots, G_r$ ($r \in \mathbb{N}$), so dass jede

Gruppe der Ordnung 2023 zu genau einer dieser Gruppen isomorph ist.

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 2023$ und n_p für $p \in \{7, 17\}$ jeweils die Anzahl der p -Sylowgruppen. Dritter Sylowsatz $\Rightarrow$

$n_{17} \mid 7 \Rightarrow n_{17} \in \{1, 7\}$, außerdem

$$n_{17} \equiv 1 \pmod{17}, 7 \not\equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow n_{17} = 1$$

$n_7 \mid 17^2 \Rightarrow n_7 \in \{1, 17, 17^2\}$, außerdem

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7}, 17 \equiv 3 \not\equiv 1 \pmod{7}, 17^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n_7 = 1$$

Sei P die einzige 7- und Q die einzige 17-Sylowgruppe von G . $n_7 = 1 \xrightarrow[\text{Satz}]{2. \text{ Sylow-}}$ $P \trianglelefteq G$

G eine
 $N \leq G$,
 $U = \{e\}$
 ist, dann
 $G \cong U \times N$
 auf
 2023
 HIST1A3
 HIST3A1
 die Liste von
 dass jede

$$n_{17} =$$

Beh:

nach $\Rightarrow$

zu ii) D
 heit

zu iii) P
 Unte

und der

$$|P| = 7$$

$$\Rightarrow |U|$$

an einer die -

$$V_{17} = 1 \xRightarrow{\text{L.S. flows}} Q \leq G$$

Beh.: G ist inneres dir. Produkt von P und Q .

noch zu überprüfen (i) $P \cap Q = \{e\}$

$$(ii) G = PQ$$

zu (i) Dies folgt aus der Teilerfremdheit von $|P| = 7$ und $|Q| = 17^2$.

zu (ii) $P \leq G, Q \leq G \Rightarrow U = PQ$ ist Untergruppe von G . Aus $P, Q \leq U$ und dem Satz von Lagrange folgt, dass $|P| = 7$ und $|Q| = 17^2$ Teiler von $|U|$ sind.
 $\Rightarrow |U|$ ist Vielfaches von $\text{kgV}(7, 17^2) = 2023$

2023 und
die Anzahl der
Sätze $\Rightarrow$

ferdem

$$\Rightarrow V_{17} = 1$$

außerdem

$$17^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv$$

die einzige

$$\xRightarrow{\text{L.S. flows}} P \leq G$$

isomorph zu G_2

ist $g =$

$$7^2 = 289,$$

$$\mathbb{Z}) \neq 0_{G_1}$$

$$= 0_{G_1}$$

G_2 ein

isom

$$h = 0_{G_2},$$

$$119. \quad \square$$

$$\Rightarrow |U| \geq 2023 = |G| \stackrel{U \subseteq G}{\Rightarrow} G = U = PQ.$$

($\Rightarrow$ Beh.) Aus der Behauptung folgt

die Existenz einer Isom. $G \cong P \times Q$.

$|P| = 7$ ist Primzahl $\Rightarrow P$ ist zyklisch

$$\Rightarrow P \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

$|Q| = 7^2$ ist Primzahlquadrat $\Rightarrow Q$ ist

abelsch. Nach dem Hauptsatz über endliche

abelsche Gruppen folgt $Q \cong \mathbb{Z}/7^2\mathbb{Z}$ oder $Q \cong$

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2 \Rightarrow G \text{ ist isomorph zu einer}$$

$$\text{der Gruppen } G_1 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7^2\mathbb{Z} \quad ,$$

$$G_2 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2.$$

A3

$$p < q < r$$

ung pqr

normale

$$q, vq \geq r$$

et v_i für je-

der i -Sylow-

$$\Rightarrow v_p \in \{1, q, r, qr\}$$

$$v_p \neq 1$$

$$v_p \geq q$$

Noch zu zeigen: G_1 ist nicht isomorph zu $G_2 \Rightarrow$

Ang., es gilt $G_1 \cong G_2$. In G_1 ist $g = (\Rightarrow$

$(0, 1)$ ein Element der Ordnung $17^2 = 289$, die

wegen $m \cdot (0, 1) = (0 + 7\mathbb{Z}, m + 17\mathbb{Z}) \neq 0_{G_1}$ $|P| =$

für $1 \leq m < 289$ und $289 \cdot g = 0_{G_1}$ $\Rightarrow$

Wegen $G_1 \cong G_2$ müsste auch in G_2 ein

Element dieser Ordnung existieren $|Q| =$

Für jedes $h \in G_2$ gilt aber $119 \cdot h = 0_{G_2}$, abels

also $\text{ord}(h) \mid 119$, und $289 \nmid 119$. $\square$ abels

des Grp $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$

$G_2 =$

$p, r, p \nmid r$

außerdem

$p \Rightarrow$

$) \Rightarrow q < p$

$r \nmid \Rightarrow v_q \geq r$

pqr

$p, q < r$

nach dem 3. Sylows.

$= pq$

normale Sylowgruppe.

Gruppe.

$v_r = pq$

H22T3A3 Übung: H08T3A3

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$
und G eine Gruppe der Ordnung pqr .

(a) Zeigen Sie: Hat G keine normale
Sylowgruppe, dann gilt $v_p \geq q, v_q \geq r$
und $vr = pq$. Dabei bezeichnet v_i für je-
des $i \in \{p, q, r\}$ die Anzahl der i -Sylow-
gruppen von G .

Dritter Sylowsatz $\Rightarrow v_p \mid qr \Rightarrow v_p \in \{1, q, r, qr\}$

G hat keine p -Sylowgs. $\xrightarrow{\text{2. Sylowsatz}} v_p \neq 1$

$\Rightarrow v_p \in \{q, r, qr\} \xrightarrow{r, q > q} v_p \geq q$

noch

Ang.

(0, 1)

wegen

für

Wegen

Elemente

Für jed

also

Sylowgrup-
 G der Ord-
 Untergruppen
 Gruppe ent-
 1 Elemente
 ist jedes
 = p in genau einer
 nämlich in $\langle g \rangle$.
 genau $(p-1)v_p$
 wegen $v_p \geq q$
 mente auf die
 dass es mindestens
 und genau $(r-1)pq$

ebenso: $v_q \mid pr \Rightarrow v_q \in \{1, p, r, pr\}$
 2. Sylows. $v_q \in \{p, r, pr\}$ außerdem
 $v_q \equiv 1 \pmod q$. Ang. $v_q = p. \Rightarrow$

$$p \equiv 1 \pmod q \Rightarrow q \mid (p-1) \Rightarrow q < p$$

$$\downarrow \text{zu } p < q \Rightarrow v_q \in \{r, pr\} \Rightarrow v_q \geq r$$

$$v_r \mid pq \Rightarrow v_r \in \{1, p, q, pq\}$$

2. Sylowsatz $\Rightarrow v_r = 1$ Aus $p, q < r$
 folgt $p, q \not\equiv 1 \pmod r$ und nach dem 3. Sylows.
 somit $v_r \notin \{p, q\} \Rightarrow v_r = pq$

(b) Zeigen Sie: G hat eine normale Sylowgruppe.

Ang. G hat keine normale Sylowgruppe.

Teil (a) $\Rightarrow v_p \geq q, v_q \geq r, v_r = pq$

H22-

Seren

und G

(a) Zeig

Sylow

und v_r

des ce

gruppen

Dritter Syl

G hat kein

$\Rightarrow v_p \in \{$

gesamt ent-
estens

+ 1 Elemente.

+ (r-1)pq + 1

~~pq~~ + 1

+ 5 ≥ 5q + 1

⇒ q ≤ 1 ⇓

einfache Gruppe

⇒ |G| = 2 · 3 · 337

Wegen $|G| = pqr$ sind die p -Sylowgrup-
pen genau die Untergruppen von G der Ord-
nung p , und somit sind diese Untergruppen
zyklisch. Jede solche Untergruppe ent-
hält damit genau $\varphi(p) = p-1$ Elemente
der Ordnung p , und umgekehrt ist jedes
Element $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = p$ in genau einer
dieser Untergruppen enthalten, nämlich in $\langle g \rangle$.

Daraus folgt, dass es in G genau $(p-1) \cdot v_p$
Elemente der Ordnung p gibt, wegen $v_p \geq q$
also mindestens $(p-1)q$ Stück.

Die Anwendung derselben Argumente auf die
Primzahlen q und r zeigt, dass es mindestens
 $(q-1)r$ Elemente der Ordnung q und genau $(r-1)pq$

ebenso
2. Sylow

$v_q \equiv 1$

$p \equiv 1 \pmod{q}$

⇓ zu

$vr \mid pq$

2. Sylow

folgt $p \mid r$

somit $vr \mid p$

(b) Zeigen S

Ang. G hat

Teil (a) ⇒

Elemente der Ordnung r gibt. Insgesamt ent-
hält G (zzgl. Neutralem.) mindestens

$(p-1) \cdot q + (q-1)r + (r-1)pq + 1$ Elemente.

$$\Rightarrow pqr = |G| \geq (p-1)q + (q-1)r + (r-1)pq + 1$$

$$\Rightarrow \cancel{pqr} \geq \cancel{pq} - q + qr - r + \cancel{pqr} - \cancel{pq} + 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq qr - q - r + 1$$

$$\Rightarrow q+r \geq qr+1 \quad \begin{matrix} p \geq 2, q \geq 3 \\ r \geq 5 \end{matrix} \Rightarrow q+5 \geq 5q+1$$

$$\Rightarrow 5 \geq 4q+1 \Rightarrow 4q \leq 4 \Rightarrow q \leq 1 \quad \downarrow$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe
der Ordnung 2022 gibt.

Ang. G ist eine solche Gruppe $\Rightarrow |G| = 2 \cdot 3 \cdot 337$

Beh.: 337 ist eine Primzahl

Ang. 337 ist keine Primzahl. Sei p der kleinste
Primteiler von 337. $\rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $337 = m \cdot p$

Dabei ist $m \geq p$, weil $m > 1$ und alle Primteiler
von $m \geq p$ sind. $\Rightarrow p^2 \leq 337 \Rightarrow p \leq \sqrt{337}$

$$19^2 = 361 > 337 \Rightarrow p < 19 \stackrel{p \text{ Prim.}}{\Rightarrow} p \leq 17$$

überprüfe: Keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17
ist Teiler von 337. $\downarrow$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Somit ist $|G|$ Produkt der Primzahlen $p=2$,
 $q=3$, $r=337$. $\stackrel{1b)}{\Rightarrow}$ G hat normale Sylowgruppe P

$$1 < |P| \leq r < |G| \Rightarrow P \neq \{e\}, G, P \leq G$$

$\Rightarrow G$ ist nicht einfach. $\square$

Aufgabe zum „Elemente zählen“ : F15T1A3

Erkennung: Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Sei $\circ$ eine Operation von G auf X . Dann ist $T_g: X \rightarrow X, x \mapsto g \circ x$ für jedes $g \in G$ ein Element der Permutationsgruppe $\text{Per}(X)$ von X , und $\phi: G \rightarrow \text{Per}(X), g \mapsto T_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

In Zusammenhang mit Sylowsatzaufgaben wird dies angewendet auf

- (i) die Operation einer endl. Gruppe G auf der Menge ihrer p -Sylowgruppen (durch Konjugation)
- (ii) die Operation einer Gruppe G auf den Linksnebenklassen einer Unterg. $U \leq G$, durch $g \cdot (hU) = (gh)U$.

der kleinste

$$337 = mp$$

le Primteiler

$$p \leq \sqrt{337}$$

$$p \leq 17$$

$$7, 11, 13, 17$$

$$p=2,$$

Sylowgruppe P

$$G, P \leq G$$

