FO9T1A1

Sei A eine endl. abelsche Gruppe, $B \leq A$, mit $B \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung von A.

Satz v. Lagrange $\Rightarrow |A| = (A:B)|B| = |A/B| \cdot |B| = |\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}| \cdot |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 8 \cdot 2 = 16$

(b) Zeigen Sie, dass A höchstens vier Elemente der Ordnung ≤ 2 besitzt.

In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung 2, weil $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ zyklisch von Ordnung 8 und 2 Teiler von 8 ist.

Daraus folgt, dass es genau zwei Elemente der Ordnung ≤ 2 in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gibt (nämlich $\overline{0}$ und $\overline{4}$). Wegen $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gilt dasselbe für A/B.

Gilt nun $\operatorname{ord}(a) \leq 2$ für ein $a \in A$, dann bedeutet dies $a + a = 0_A$. In der Faktorgruppe A/B gilt dann ebenso $(a+B) + (a+B) = (a+a) + B = 0_A + B = 0_{A/B}$, also $\operatorname{ord}(a+B) \leq 2$. Ang. A hat mehr als vier Elemente der Ordnung ≤ 2. Weil jedes Element in A/B unter dem kan. Epimorphismus genau 2 Urbilder hat, gäbe dann mehr als zwei Elemente der Ordnung ≤ 2 in A/B. ↯

zu(c) Zeigen Sie, dass A zyklisch oder isomorph zu einem direkten Produkt $A_1 \times A_2$ zweier zyklischer Gruppen A_1, A_2 ist.

Nach dem Satz über endliche abelsche Gruppen gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und zykl. Gruppen $A_1, \dots, A_r$ mit $A \cong A_1 \times \dots \times A_r$, wobei $|A_j| > 1$ für $1 \leq j \leq r$ und $\prod_{j=1}^{r} |A_j| = |A| = 16$, d.h. jedes $|A_j|$ ist eine 2-Potenz größer 1. z.zg.: $r \leq 2$. Ang., es ist $r \geq 3$. Weil jedes A_j zyklisch von 2-Potenzordn. > 1 ist, gibt es jeweils genau ein Element $a_j \in A_j$ mit $\operatorname{ord}(a_j) = 2$. Durch $(c_1, \dots, c_r) \in A_1 \times \dots \times A_r$ mit $c_j \in \{0_{A_j}, a_j\}$ für

$1 \leq j \leq r$ sind dann 2^r verschiedene Elt. der Ordn ≤ 2 in $A_1 \times \ldots \times A_r$ geg. $\Rightarrow$ Es gibt mind. 2^r Elt. der Ordnung ≤ 2 in A. $2^r > 4$ wg. $r \geq 3$. ↯ zum Ergebnis von (b)

(d) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für A bis auf Isomorphie.

Nach Teil (c) ist $A = A_1$ zyklisch oder $A \cong A_1 \times A_2$ mit A_1, A_2 zyklisch, $|A_1|, |A_2| > 1$, $|A_1| \cdot |A_2| = 16$.

$\Rightarrow$ A ist isomorph zu einer der Gruppen

$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Ang. $A \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $4 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$ $\forall (\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ In A gibt es nur Elemente der Ordnung ≤ 4.

$\Rightarrow$ Wegen $4 \cdot (a + B) = 4a + B = 0_A + B = 0_{A/B}$ gilt dasselbe in A/B. Aber wegen $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gibt es in A/B ein Element der Ordnung 8. ↯ also:

$A \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ oder $A \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Übung</u>: (a) Sei $A = \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. Geben Sie eine Untergruppe B von A mit $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ an. (mit Nachweis)

(b) Lösen Sie Teil (a) ebenso für $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

weitere Übung: F12T2A1

F14T2A3 (Lösung: F17T2A3)

Sei G eine Gruppe. Für jedes $g \in G$ sei $c_g : G \to G$ der Automorphismus definiert durch $c_g(h) = g h g^{-1}$. Wir betrachten die Teilmenge $\mathrm{Inn}(G) = \{ c_g \mid g \in G \}$ von $\mathrm{Aut}(G)$ sowie das Zentrum $Z(G) = \{ h \in G \mid gh = hg$ für alle $g \in G \}$ der Gruppe G.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

zu überprüfen: (1) $\mathrm{id}_G \in \mathrm{Inn}(G)$ (da id_G das Neutralelement der Gruppe $\mathrm{Aut}(G)$ ist)

(2) $\forall \sigma, \tau \in \mathrm{Inn}(G) : \sigma \circ \tau, \sigma^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$

(3) $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(G)\ \forall \tau \in \mathrm{Inn}(G) : \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$

<u>zu (1)</u> z.zg: $\exists g \in G: id_G = c_g$ Es gilt: $c_e(h) = ehe^{-1} = h$
$\forall h \in G \Rightarrow id_G = c_e$ (wobei e das Neutralelt. von G bezeichnet)

<u>zu (2)</u> Seien $\sigma, \tau \in Inn(G)$, z.zg: $\sigma \circ \tau, \sigma^{-1} \in Inn(G)$

$\sigma, \tau \in Inn(G) \Rightarrow \exists g_1, g_2 \in G: \sigma = c_{g_1}, \tau = c_{g_2}$

Für alle $h \in G$ gilt $(\sigma \circ \tau)(h) = \sigma(\tau(h)) = c_{g_1}(c_{g_2}(h)) =$
$c_{g_1}(h)\,(g_2 h g_2^{-1}) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = c_{g_1 g_2}(h)$.

$\Rightarrow \sigma \circ \tau = c_{g_1 g_2} \Rightarrow \sigma \circ \tau \in Inn(G)$

Die Rechnung zeigt: $c_g \circ c_{g'} = c_{gg'}$ $\forall g, g' \in G$

$\Rightarrow c_{g_1} \circ c_{g_1^{-1}} = c_{g_1 g_1^{-1}} = c_e = id \Rightarrow \sigma^{-1} = (c_{g_1})^{-1} = c_{g_1^{-1}}$

$\Rightarrow \sigma^{-1} \in Inn(G)$

zu (3) Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $\tau \in \mathrm{Inn}(G)$.

z. zg.: $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$ $\quad \tau \in \mathrm{Inn}(G) \Rightarrow$

$\exists g \in G$ mit $\tau = c_g$ Für jedes $h \in G$ gilt

$$(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(h) = \sigma(c_g(\sigma^{-1}(h))) = \sigma(g\,\sigma^{-1}(h)\,g^{-1})$$

$$= \sigma(g)\,\sigma(\sigma^{-1}(h))\,\sigma(g^{-1}) = \sigma(g)\,h\,\sigma(g)^{-1} = c_{\sigma(g)}(h).$$

$$\Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = c_{\sigma(g)} \Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$$

zu (b) Zeigen Sie: $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$

Betrachte die Abbildung $\phi: G \to \mathrm{Inn}(G)$, $g \mapsto c_g$.

Der angeg. Isomorphismus folgt aus dem Homomorphiesatz, wenn wir folgende Punkte verifizieren können:

(1) ϕ ist ein Gruppenhom. (2) ϕ ist surjektiv

(3) $\ker(\phi) = Z(G)$

zu(1) Seien $g, g' \in G$. Dann gilt $\phi(gg') = c_{gg'}$
$= c_g \circ c_{g'} = \phi(g) \circ \phi(g')$.
↑ siehe oben

zu(2) Sei $\sigma \in \mathrm{Inn}(G)$. $\Rightarrow \exists g \in G$ mit $\sigma = c_g$
$\Rightarrow \phi(g) = c_g = \sigma$

zu(3) Sei $g \in G$. Dann gilt die Äquivalenz
$g \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(g) = \mathrm{id}_G \Leftrightarrow c_g = \mathrm{id}_G \Leftrightarrow$
$\forall h \in G: c_g(h) = \mathrm{id}_G(h) \Leftrightarrow \forall h \in G: ghg^{-1} = h$
$\Leftrightarrow \forall h \in G: gh = hg \Leftrightarrow g \in Z(G)$

zu(c) Bestimmen Sie alle Automorphismen von $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ und zeigen Sie, dass es genau einen inneren gibt, d.h. genau ein Element in $\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.

Weil die Gruppe zyklisch ist, mit $\bar{1}$ als Erzeuger, ist jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ durch $\sigma(\bar{1})$ bereits eindeutig festgelegt. Auf Grund der Aut-eigenschaft muss $\mathrm{ord}(\sigma(\bar{1})) = \mathrm{ord}(\bar{1}) = 7$ gelten $\Rightarrow \sigma(\bar{1}) \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

Umgekehrt existiert für jedes a aus dieser Menge genau ein Hom $\sigma : G \to G$ mit $\sigma(\bar{1}) = a$, und wegen $\mathrm{ord}(a) = 7$ ist dies ein Aut.

$\Rightarrow |\mathrm{Aut}(G)| = 6$, $\mathrm{Aut}(G) = \{\sigma_a \mid 1 \leq a \leq 6\}$, wobei σ_a eind. bed. durch $\sigma(\bar{1}) = a + 7\mathbb{Z}$ für $1 \leq a \leq 6$.

Wegen $\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ (siehe Teil (a)) enthält $\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ mindestens ein Element, nämlich $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} = c_{\bar{1}}$. Sei nun $\sigma \in \mathrm{Inn}(G)$ beliebig vorgeg., $\sigma = c_{\bar{a}}$ für ein $\bar{a} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Für jedes $\bar{b} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gilt dann

$$\sigma(\bar{b}) = c_{\bar{a}}(\bar{b}) = \bar{a} + \bar{b} + (-\bar{a}) = \bar{a} + (-\bar{a}) + \bar{b} = \bar{0} + \bar{b} = \bar{b} \Rightarrow \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}.$$

$\Rightarrow$ Es gibt außer $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}$ keine weiteren Elemente in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$.

Korrekturen: 4. Zeile v.u.: „Sei nun $\sigma \in \mathrm{Inn}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$...“, Ende letzte Zeile „...keine weiteren Elemente in $\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.“

Gruppenoperationen

Def.: Eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abb. $\bullet : G \times X \to X$ mit den Eigenschaften $e \bullet x = x$, $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$ für alle $x \in X$, $g, h \in G$.

Def.: (i) Für jedes $x \in X$ wird $G(x) = \{ g \bullet x \mid g \in G \}$ die Bahn des Elements x. (wichtig: Die Bahnen bilden eine Zerlegung der Menge X. Gibt es nur eine einzige Bahn, dann bezeichnet man die Operation als transitiv.)

(ii) Für jedes $x \in X$ wird $G_x = \{ g \in G \mid g \bullet x = x \}$ der Stabilisator von x genannt. Dies ist eine Untergruppe von G.

Beispiele für Gruppenoperationen:

(1) Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\sigma \cdot k = \sigma(k) \quad \text{für } 1 \le k \le n, \ \sigma \in S_n$$

(Dies ist eine transitive Operation.)

(2) Operation von $GL_n(K)$ auf K^n definiert durch

$$A \cdot v = Av \quad \text{für } v \in K^n, \ A \in GL_n(K)$$

(Dies ist <u>keine</u> transitive Operation, denn: Wäre dies so, dann müsste $GL_n(K)(0_{K^n}) = K^n$ gelten. Tatsächlich aber gilt $A \cdot 0_{K^n} = 0_{K^n}$ für alle $A \in GL_n(K)$, also $GL_n(K)(0_{K^n}) = \{0_{K^n}\}$, für $n \in \mathbb{N}$.)