

H2OT1A4 G Gruppe, H = Untergr. bestehend aus Produkten von Quadraten von Elementen der Gruppe G

(a) bereits gezeigt: $H = A_4$ falls $G = A_4$

(b) gesucht: Untergr. H falls $G = S_4$

In Teil (a) wurde bereits gezeigt, dass alle 3-Zykel Quadrate in A_4 sind. Sie sind damit auch Quadrate in S_4 und damit in der Untergr. H enthalten.

andererseits: Jedes Element aus H hat nach

Def die Form $\sigma_1^{2_0} \dots \sigma_r^{2_r}$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und

Def die Form $\sigma_1^2 \circ \dots \circ \sigma_r^2$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in S_4$. Das Signum von einem Element ist immer positiv, denn

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma_1^2 \circ \dots \circ \sigma_r^2) &= \operatorname{sgn}(\sigma_1^2) \circ \dots \circ \operatorname{sgn}(\sigma_r^2) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma_1)^2 \circ \dots \circ \operatorname{sgn}(\sigma_r)^2 = 1 \circ \dots \circ 1 = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt $H \subseteq A_4$. Da H die acht 3-Zykel enthält, gilt $|H| \geq 8$, und wegen $|A_4| = 12$ folgt daraus $H = A_4$, wie in Teil (a).

(c) Zeigen Sie, dass $H \neq G$ gilt, falls G eine Untergruppe vom Index 2 besitzt.

[Def: Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$.

Dann existiert auf der Menge $\bar{G} = G/N$ der Links-
nebenklassen von N eine Verknüpfung $*$ geg. durch
 $gN * hN = (gh)N \quad \forall g, h \in G$, und $(\bar{G}, *)$ ist
eine Gruppe, die sog. Faktorgruppe von G modulo N .]

Nach Voraussetzung existiert eine Untergrs. $N \trianglelefteq G$
mit $(G:N) = 2$. Lt. Vorlesung ist N dann ein Nor-
malteiler. Sei $\bar{G} = G/N$ die entsprechende Faktor-
gruppe und $\pi_N: G \rightarrow \bar{G}, g \mapsto gN$ der zugehörige kanoni-
sche Epimorphismus. Beh: $H \subseteq N$

Sei $h \in H$. Nach Def von H gibt es dann ein $r \in \mathbb{N}_0$ und $g_1, \dots, g_r \in G$ mit $h = g_1^2 \cdot \dots \cdot g_r^2$
 $\Rightarrow \pi_N(h) = \pi(g_1^2 \cdot \dots \cdot g_r^2) = \pi_N(g_1)^2 \cdot \dots \cdot \pi_N(g_r)^2$

Wegen $|G/N| = (G:N) = 2$ $\xrightarrow{\pi_N \text{ Hom.}}$ gilt $\bar{g}^2 = e_{G/N} = N$ für
alle $\bar{g} \in G/N \Rightarrow \pi_N(g_j)^2 = e_{G/N}$ für $1 \leq j \leq r$

$\Rightarrow \pi_N(h) = e_{G/N} \Rightarrow hN = N \Rightarrow h \in N \Rightarrow \text{Beh.}$

Wegen $(G:N) = 2$ gilt $N \neq G$. Aus der
Beh. folgt also $H \neq G$. □

Def: Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$.

Zusammenfassung - symm. Gruppen

- Def. $S_n = \text{Per}(M_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, wobei jeweils $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ und $\text{Per}(X) =$ Gruppe der bij. Abb. $X \rightarrow X$ mit der Komposition als Verknüpfung
- Tabellenschreibweise vs Zykelschreibweise
$$(125)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
- Ordnung $|S_n| = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Signum: sgn ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(S_n, \circ)$ und $(\{ \pm 1 \}, \cdot)$, d.h. $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$

außerdem: $\text{sgn}(\tau) = (-1)^{k-1}$, falls τ ein k -Zykel ist ($2 \leq k \leq n$)

- alternierende Gruppe $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$
Ordnung: $A_n = \frac{1}{2}n!$ für $n \geq 2$ ($|A_1| = 1$)

weitere Umfänge:

- Diedergruppen D_n ($n \geq 3$) von Ordnung $2n$, nicht abelsch
- kleinste Vierergruppe $V_4 = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (Ordnung 4)
(ist abelsch)

- S_n ist abelsch für $n \leq 2$, sonst nicht abelsch
 A_n ist abelsch für $n \leq 3$, sonst nicht abelsch
 A_n, S_n sind auflösbar für $n \leq 4$, sonst nicht auflösbar
 A_n ist einfach für $n \geq 5$ und $n=3$

(Die Gruppe A_4 ist nicht einfach, weil $V_4 \trianglelefteq A_4$, sogar $V_4 \trianglelefteq S_4$ gilt.)

- Ist σ ein Produkt ^{disjunkten} von Zykeln der Längen $k_1, \dots, k_r$ mit $k_1 \geq \dots \geq k_r \geq 2$ (und $\sum_{j=1}^r k_j \leq n$, falls $\sigma \in S_n$), dann bezeichnet man $(k_1, \dots, k_r)$ als Zerlegungstyp von σ .

Bsp: $(123)(45)(67) \in S_7$ ist vom Zerlegungstyp $(k_1, k_2, k_3) = (3, 2, 2)$

- Ist $(k_1, \dots, k_r)$ der Zerlegungstyp von $\sigma \in S_n$, dann ist σ in S_n ein Element der Ordnung $\text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(k_1, \dots, k_r)$.

ein k -

Bsp. $\text{ord}((123)(45)(67)) = \text{kgV}(3, 2, 2)$
 $= 6$

$\text{gn}(\sigma) = 17$
 $(= 1)$

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{2, \dots, n\}$. Dann gibt es in S_n genau $(k-1)! \binom{n}{k}$ k -Zykel.

von Ord-

, $(12)(34)$,
ng 4)

nicht abelsch
ist nicht abelsch
 S_4 , sonst
und $n=3$

Anzahl der
Möglichkeiten für
den k -Zykel mit
einem festen
Träger

Anzahl Möglichkei-
ten für die Wahl des
Trägers, also die Menge
der Elemente, die im Zykel
vorkommen

- Anzahl der Elemente eines zusammen-
gesetzten Typs

Beispiel: Elemente vom Zerlegungstyp

$(2, 2, 2)$ in S_6 : Möglichkeiten 2. Transposition

$\frac{1}{3!} \cdot \binom{6}{2} \binom{4}{2} \cdot 1 \leftarrow$ Möglichkeiten 3. Transposition
Mögliche. erste Tranop.

→ $\frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 15$ Elemente vom Typ $(2, 2, 2)$ in der Gruppe S_6 (Der Faktor $\frac{1}{3!}$ ist notwendig, weil die Reihenfolge bei der Wahl der Transp. keine Rolle spielt.)

Übung. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente vom Zerlegungstyp $(3, 2, 2)$ in S_8 .

123T1A2 Sei $\sigma \in S_n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m$

wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ paarweise disjunkte Zyklen bezeichnen. Es sei k_j jeweils die Länge des Zyklus σ_j .

(a) Zeigen Sie: $\text{ord}(\sigma) = \text{kgV}(k_1, \dots, k_m)$

Nach Def. des kgV müssen wir überprüfen:

i) $\text{ord}(g)$ ist Vielfaches von $k_1, \dots, k_r$

ii) Ist $d \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von $k_1, \dots, k_r$, dann ist d auch Vielfaches von $\text{ord}(g)$.

[wichtige Regel für Elementordnungen:

Gruppe, $n \in \mathbb{N}$, $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = n$, dann gilt

$$(*) \quad \forall k \in \mathbb{Z} : g^k = e \iff n \mid k$$

Ist umgekehrt $(*)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, dann ist n die Ordnung von g .]

zu (ii) geg. $d \in \mathbb{N}$ mit $k_j \mid d$ für $1 \leq j \leq m$.

d.h. $\exists l_j \in \mathbb{N}$ mit $d = l_j k_j$, $1 \leq j \leq m$

Erfüllt d die Bedingung $\sigma^d = \text{id}$, dann ist d lt. V. ein Vielfaches der Elementarordnung $\text{ord}(\sigma)$.

Weil die Zyklen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ paarweise disjunkt

sind, sind sie auch paarweise vertauschbar,

und daraus wiederum folgt $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m)^u =$

$\sigma_1^u \circ \dots \circ \sigma_m^u \quad \forall u \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten

$$\sigma^d = \sigma_1^d \circ \dots \circ \sigma_m^d = \sigma_1^{k_1 l_1} \circ \dots \circ \sigma_m^{k_m l_m} = \quad (a)$$

$(g_1^{k_1})^{l_1} \circ \dots \circ (g_m^{k_m})^{l_m}$ Laut Vorlesung ist jeder k -Zykel in S_n ein Element der Ordnung k , für $2 \leq k \leq n$. $\Rightarrow g_f^{k_f} = \text{id}$ für $1 \leq f \leq m \Rightarrow \sigma^d = \text{id}$

zu i) Es genügt zu zeigen $\forall m \in \mathbb{Z}$:

$$\sigma^u = \text{id} \Rightarrow k_f \mid u \text{ für } 1 \leq f \leq m$$

(weil dies auf $u = \text{ord}(\sigma)$ angewendet werden kann). Sei also $u \in \mathbb{Z}$ mit $\sigma^u = \text{id}$.

s.o. $g_1^u \circ g_2^u \circ \dots \circ g_m^u = \text{id}$ Da die Träger von $g_1, \dots, g_m$ paarweise disjunkt sind, gilt dasselbe für die Träger von $g_1^u, \dots, g_m^u$.

[Träger eines Elements $\tau \in S_n =$ Zahl $k \in \mathbb{N}_n$
mit der Eigenschaft $\tau(k) \neq k$]

Das Produkt dieser Elemente kann damit
nur gleich der Identität sein, wenn

$\sigma_j^u = \text{id}$ für $1 \leq j \leq m$ gilt. Wegen $\text{ord}(\sigma_j)$
 $= k_j$ folgt jeweils $k_j \mid u$ für $1 \leq j \leq m$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente
maximaler Ordnung in (i) S_6 und (ii) S_7 .

zu i) In S_6 gibt es neben id und 2-, 3-,
4-, 5- und 6-Zyklen noch Elemente vom
Zerlegungstyp $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(3, 3)$

$\in M_n$

damit

m

gen ord(S_j)

$\leq j \leq m$

Elemente

und (ii) S_7

und 2-, 3-

Elemente von

(4,2), (3,3)

und (2,2,2). Jeder k -Zykel ($k \in \{2, \dots, 6\}$)
ist jeweils ein Element der Ordnung k ,
und die Ordnungen der restlichen Typen
sind Teil (a) geg. durch $\text{kgV}(2,2) = 2$,
 $\text{kgV}(3,2) = 6$, $\text{kgV}(4,2) = 4$, $\text{kgV}(3,3) = 3$
bzw. $\text{kgV}(2,2,2) = 2$. Die maximale Element-
ordnung ist also 6, und die Elemente dieser Ord-
nung sind genau die 6-Zykel und die
Elemente vom Zerlegungstyp (3,2).

Lt. VL gibt es in S_n jeweils $(k-1)! \binom{n}{k}$
 k -Zykel für $k \in \mathbb{N}$, $k \in \{2, \dots, n\}$, also
genau $5! \cdot \binom{6}{6} = 120$ 6-Zykel in S_6 .

Bei einem Element vom Zerlegungstyp $(3, 2)$ gibt es $2 \cdot \binom{6}{3} = 2 \cdot 20 = 40$ Möglichkeiten für die Wahl des 3-Zykels (20 Möglichkeiten für die Wahl des Trägers, und bei gewähltem Träger noch zwei Möglichkeiten für den 3-Zykel). Für die Wahl der Transposition bleiben danach noch $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten. Insgesamt kommen wir damit auf $40 \cdot 3 = 120$ Elemente vom Zerlegungstyp $(3, 2)$ und auf $120 + 120 = 240$ Elemente der maximalen Ordnung 6.

In der Gruppe S_7 ist jedes Element außer der Identität als Produkt von bis zu drei disjunkten Zykeln darstellbar. (Produkte von vier oder mehr Zykeln können nicht auftreten, weil jeder Zykel mindestens Länge 2 hat und $4 \cdot 2 = 8 > 7$ ist.) Jeder Zykel hat maximal Ordnung 7. Die Produkte von drei disjunkten Zykeln sind vom Zerlegungstyp $(2, 2, 2)$ oder $(3, 2, 2)$, und hier ist die Ordnung gleich 2 bzw. 6.

Die Produkte von zwei disjunkten Zyklen sind vom Zerlegungstyp $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(3, 3)$ oder $(4, 3)$ und somit von Ordnung 2, 6, 4, 3 bzw. 12. Die Elemente maximaler Ordnung sind also genau die Elemente vom Zerlegungstyp $(4, 3)$, und diese Ordnung ist gleich 12. Bei einem solchen Element gibt es genau $3! \cdot \binom{7}{4} = 210$ Möglichkeiten für die Wahl des 4-Zykels und danach noch zwei Möglichkeiten für die Wahl des 3-Zykels. (Der Träger des 3-Zykels besteht aus den drei Zahlen, die nicht im Träger des 4-Zykels vorkommen, ist also durch den 4-Zykel bereits festgelegt.) Die Anzahl der Elemente maximaler Ordnung in S_7 ist also gleich $210 \cdot 2 = 420$.