

Gruppentheorie

Def. Gruppe = Paar $(G, \cdot)$ wobei
 G eine Menge und $\cdot$ eine Verknüpfung auf
 G bezeichnet, und außerdem gilt

(i) $\forall a, b, c \in G : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(ii) $\exists e \in G : \forall a \in G : a \cdot e = e \cdot a = a$

(iii) $\forall a \in G : \exists b \in G : a \cdot b = b \cdot a = e$

Abelsche Gruppe $\Rightarrow$ außerdem noch:

$$\forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a$$

Abelsche Gruppe $\Rightarrow$ außerdem noch:

Zwei Schreibweisen für Gruppen:

(1) multiplikative Schreibweise:

Verknüpfungssymbol $\cdot$ oder $*$, Neutralelement e , e_G oder 1_G , Inverse a^{-1} , Potenzen $a \cdot a = a^2$,
 $(a \cdot a \cdot a)^{-1} = a^{-3}$

(2) additive Schreibweise: Verknüpfungssymbol $+$,
Neutralelement 0_G , Inverse $-a$, Potenzen
 $a + a = 2a$, $-(a + a + a) = (-3)a$ (nur bei
abelschen Gruppen üblich)

Beispiele für abelsche Gruppen:

(1) $(R, +)$ falls R Ring, insb. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$...

(2) $(V, +)$ falls V K -Vektorraum, K Körper
zum Beispiel $(\mathbb{R}^5, +)$

(3) $R^\times$ falls R Ring (wobei $R^\times =$ Einheitsgruppe)
zum Beispiel $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (mit der Multiplikation)

insb. prime Restklassengruppen, zum Beispiel
 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7\}$

(4) $A \times B$, falls A, B abelsche Gruppen,
z.B. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Diese ist abelsch, aber
nicht zyklisch.)

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{1, 3, 5, 7\}$$

(4) $A \times B$, falls A, B abelsche Gruppen.

Beispiele für nicht-abelsche Gruppen:

- (1) $G \times H$ falls G, H Gruppen, wobei G nicht abelsch oder H nicht abelsch (z.B. $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)
- (2) $G \rtimes_{\phi} H$ (semidirektes Produkt), wobei G nicht abelsch oder H nicht abelsch oder der Hom. $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$ nichttrivial ist
- (3) S_n für $n \geq 3$ (symm. Gruppen)
 A_n für $n \geq 4$ (alternierende Gruppen)
- (4) $GL_n(K)$ falls K Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$
- (5) D_n für $n \geq 3$ (Diedergruppen)

Aufgaben zum Gruppenbegriff:

F19T2A1, H24T1A1 (b), (c)

Def. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(i) Untergruppe von G = Teilmenge $U \subseteq G$ mit
 $e \in U, \forall a, b \in U: ab \in U$ und $a^{-1} \in U$

(ii) Normalteiler von G = Untergruppe N von G
mit der zusätzlichen Eigenschaft
 $\forall g \in G: gN = Ng$ (dazu äquivalent ist:
 $\forall g \in G: gNg^{-1} \subseteq N$)

Notation: U Untergruppe von $G \iff U \leq G$
 N Normalteiler von $G \iff N \trianglelefteq G$

Def. Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen.

$\phi: G \rightarrow H$ heißt Gruppenhomomorphismus $\Leftrightarrow$

$$\forall g, g' \in G: \phi(g \cdot g') = \phi(g) * \phi(g')$$

(Es gilt dann $\phi(e_G) = e_H$ und $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ für alle $g \in G$.)

Def. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und seien

$A, B \subseteq G$ Teilmengen von G

Komplexprodukt von A und $B = AB$

$$= \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

Erkennung: $U \leq G, N \trianglelefteq G \Rightarrow UN \leq G$

$$U \trianglelefteq G, N \trianglelefteq G \Rightarrow UN \trianglelefteq G$$

aber: $U \leq G, N \leq G \not\Rightarrow UN \leq G$

F20T3A1 Sei $\phi: G \rightarrow G'$ ein

Gruppenhomomorphismus.

(a) Geben Sie die Definition eines Normalteilers von G an.

(b) Sei $K = \ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_{G'}\}$.

Zeigen Sie: $\phi^{-1}(\phi(H)) = HK$,

wobei $H \leq G$ ist.

" $\supseteq$ " Sei $a \in HK$, z.zg: $a \in \phi^{-1}(\phi(H))$
gleichbedeutend: $\phi(a) \in \phi(H)$

$a \in HK \Rightarrow \exists h \in H, k \in K: a = hk$

$\Rightarrow \phi(a) = \phi(hk) = \phi(h)\phi(k) = \phi(h) \cdot e_{G'}$

$$= \phi(h) \xrightarrow{h \in H} \phi(a) \in \phi(H)$$

" $\subseteq$ " Sei $a \in \phi^{-1}(\phi(H))$, z.zg. $a \in HK$
 gleichbedeutend: $\exists h \in H, k \in K$ mit $a = hk$

$$a \in \phi^{-1}(\phi(H)) \Rightarrow \phi(a) \in \phi(H) \Rightarrow$$

$$\exists h \in H: \phi(a) = \phi(h) \quad \text{Sei } k = h^{-1}a$$

Dann gilt $hk = h(h^{-1}a) = a$, außerdem

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \phi(h^{-1}a) = \phi(h)^{-1} \phi(a) = \phi(a)^{-1} \phi(a) \\ &= e_G \Rightarrow k \in \ker(\phi) \Rightarrow k \in K \end{aligned}$$

(c) Seien H, K Normalteiler von G mit

$H \cap K = \{e_G\}$. Zeigen Sie: $kh = hk$
 für alle $k \in K$ und $h \in H$

Sei $h \in H$, $k \in K$. Es gilt die Äquivalenz

$$hk = kh \Leftrightarrow hkh^{-1} = k \Leftrightarrow \underbrace{hkh^{-1}k^{-1}} = e$$

$$K \trianglelefteq G \Rightarrow hkh^{-1} \in K, \text{ außerdem } k^{-1} \in K \Rightarrow hkh^{-1}k^{-1} \in K$$

$$H \trianglelefteq G \Rightarrow khk^{-1} \in H, \text{ außerdem } h \in H \Rightarrow hkh^{-1}k^{-1} \in H$$

$$\text{insgesamt: } hkh^{-1}k^{-1} \in K \cap H \stackrel{H \cap K = \{e\}}{\Rightarrow} hkh^{-1}k^{-1} = e$$

$\stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} hk = kh$

(d) Geben Sie ein Paar (U, G) an, so dass G eine Gruppe,
 U eine Untergruppe, aber U kein Normalteiler von G ist
(mit Nachweis)

$$\text{Sei } U = \langle (12) \rangle = \{id, (12)\} \text{ und } G = S_3$$

(d) Geben Sie ein Paar (U, G) an, so dass G eine Gruppe,
 U eine Untergruppe, aber U kein Normalteiler von G ist
(mit Nachweis)

U ist Untergruppe von G (nach Def. von $\langle (12) \rangle$).

U ist aber kein Normalteiler von G , denn: $(13) \in G$,

$(12) \in U$, aber $(13) \circ (12) \circ (13)^{-1} = (13) \circ (12) \circ (13) =$

$(23) \notin U$ und somit $(13) \circ U \circ (13)^{-1} \not\subseteq U$ $\square$

(d) Erinnerung: Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge
von G . $\langle S \rangle =$ die von S erzeugte Untergruppe von $G =$
kleinste Untergruppe von G , die S enthält (d.h. $U \leq G$,
 $U \supseteq S \Rightarrow U \supseteq \langle S \rangle$) wichtiger Spezialfall: $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
wichtige Regel: $\langle S \rangle = \langle T \rangle \iff S \subseteq \langle T \rangle$ und $T \subseteq \langle S \rangle$
falls S, T beliebige Teilmengen von G

H20T1A4 Sei G eine Gruppe und H die Untergruppe von G bestehend aus den Produkten von Quadraten in G , also

$$H = \{g_1^2 \cdot \dots \cdot g_n^2 \mid n \in \mathbb{N}_0, g_1, \dots, g_n \in G\}$$

(alternative Formulierung: $G = \langle S \rangle$ wobei $S = \{g^2 \mid g \in G\}$)

(a) Bestimmen Sie H für $G = A_4$.

[Erklärung: Die Gruppe S_4 besteht neben id aus den 2-, 3-, 4-Zykeln und den Doppeltranspositionen. Es gilt $\text{sgn}(\sigma) =$

id aus den 2-3-4-Zykeln und den $(-1)^k$ falls $\sigma \in S_n$ ein $2k$ -Zykel ist. Die Gruppe A_4 besteht damit aus id, den 3-Zykeln und den Doppeltranspositionen.]

Für jede 3-element. Teilmenge $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $(i k j)^2 = (i k j) \circ (i k j) = (i j k) \Rightarrow H$ enthält alle 3-Zykel.

Da A_4 genau 8 3-Zykel enthält, folgt $|H| \geq 8$. Wegen $|A_4| = 12$ muss $|H|$ nach dem Satz von Lagrange ein Teiler von 12 sein.

$|H| \geq 8$, $|H|$ teilt 12 $\Rightarrow |H| = 12 = |A_4|$
 $H \leq A_4 \Rightarrow H = A_4$