Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2025**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Elemente in G gilt:

$$|G| = p(p-1)^2(p+1)\ .$$

b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

c) Zeigen Sie, dass es mehr als eine p-Sylow-Untergruppe in G gibt.

d) Sei nun speziell $p = 3$ und

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$

Zeigen Sie, dass der Normalisator $N := \{g \in G \mid g \cdot H = H \cdot g\} \subseteq G$ von H in G aus den oberen Dreiecksmatrizen in G besteht. Folgern Sie, dass G genau vier 3-Sylow-Gruppen besitzt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Für $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ betrachte man $R_b := \{\frac{a}{b^k} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass R_b ein Teilring von $\mathbb{Q}$ und damit ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe gilt:

$$(R_b)^\times = \left\{ \frac{a}{b^k} \in R_b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und es existieren } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } ac = b^\ell \right\}.$$

c) Zeigen Sie, dass R_b ein Hauptidealbereich ist und jedes Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ die Form $\mathfrak{a} = R_b \cdot w$ für ein $w \in \mathbb{Z}$ hat.
Hinweis: Offenbar gilt $\mathbb{Z} \subseteq R_b$. Betrachten Sie für ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ den Durchschnitt mit $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ eine (3×3)-Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi_A(X)$ und $\mathbb{Q}(\alpha)$ der davon erzeugte Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Betrachten Sie die Multiplikation mit α:

$$\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha) \ , \ x \mapsto \alpha \cdot x \ .$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von φ bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und zeigen Sie, dass deren charakteristisches Polynom identisch mit dem von A ist, also $\chi_B(X) = \chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.

c) In der Situation von b): Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen A und B, betrachtet in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, ähnlich sind.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Seien ferner $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p^\times$ die Einheitengruppe von $\mathbb{F}_p$. Wir definieren

$$M := \{ \ g \in G \mid \mathrm{ord}(g) = p\}$$

als die Menge aller Gruppenelemente, deren Ordnung gleich p ist.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbb{F}_p^\times \times M \to M \ , \ ([a], g) \mapsto g^a$$

eine Gruppenoperation definiert ist.

b) Sei $g \in M$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, dass der Stabilisator

$$(\mathbb{F}_p^\times)_g := \{ \ [a] \in \mathbb{F}_p^\times \mid g^a = g\} \subseteq \mathbb{F}_p^\times$$

von $g \in M$ trivial ist, also $(\mathbb{F}_p^\times)_g = \{[1]\}$ gilt.

c) Folgern Sie, dass $|M|$ ein Vielfaches von $p-1$ ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^{15} - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Sei $L|\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 15 besitzt.

c) Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}(\alpha^5)$ den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = 5$ besitzt.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei R ein Ring. Ein Element $\omega \in R$ ist eine *n-te Einheitswurzel in R*, wenn $\omega^n = 1$ gilt, und eine *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn zusätzlich für alle $1 \leq m < n$ gilt, dass $\omega^m - 1 \in R^\times$ (also eine Einheit in R) ist.

Zeigen Sie, dass (die Restklasse von) 7 in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ eine vierte Einheitswurzel, aber keine primitive vierte Einheitswurzel ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass diese Gruppe nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl.

a) Sei q ein Primteiler von $2^p - 1$. Zeigen Sie: $q \equiv 1 \pmod{p}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Ordnung von $2 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Galois-Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K_p$ mit $\mathrm{Gal}(K_p|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachten Sie Teilkörper von geeigneten Kreisteilungskörpern.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\bar{K}$, sei $f \in K[X]$ normiert und sei $L = K(\alpha)$ mit einer Nullstelle $\alpha \in \bar{K}$ von f.

a) Zeigen Sie: Ist $[L : K] = \deg(f)$, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.

b) Sei jetzt $f \in K[X]$ irreduzibel und sei weiter $g \in K[X]$. Wir nehmen an, dass das Polynom $g(X) - \alpha \in L[X]$ irreduzibel ist.
Zeigen Sie, dass dann $f(g(X)) \in K[X]$ irreduzibel ist.
Hinweis: Sei $\beta \in \bar{K}$ mit $g(\beta) = \alpha$. Zeigen Sie $K(\beta) = L(\beta)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ und seien $U_5, U_5' \subseteq G$ zwei verschiedene 5-Sylow-Gruppen von G.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylow-Gruppen von G.

b) Sei U die von (den Elementen von) U_5 und U_5' erzeugte Untergruppe von G.
Zeigen Sie: $U = G$.

Hinweis: Wie viele 5-Sylow-Gruppen kann eine echt zwischen U_5 und G liegende Untergruppe haben?

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen. Sei weiter

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Menge G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$.

b) Die Gruppe G enthält eine zyklische Untergruppe H_{p-1} der Ordnung $p-1$ und eine zyklische Untergruppe H_p der Ordnung p.

c) Die Gruppe G ist zyklisch.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $n \geqslant 1$, sei K ein Körper, sei $\mathrm{Mat}_n(K)$ der Ring der $n \times n$ Matrizen über K, und sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Bekanntlich ist das *Minimalpolynom* von A das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_A \in K[X]$ minimalen Grades, das $\mu_A(A) = 0_{n,n}$ erfüllt.

a) Sei $m \geqslant 1$ und $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Des Weiteren sei $C \in \mathrm{Mat}_{n+m}(K)$ die Blockdiagonalmatrix $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Beweisen Sie, dass μ_C ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von μ_A und μ_B ist.

b) Entscheiden Sie begründet, ob es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_6(\mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $X^6 + X^4$ und Minimalpolynom μ_A vom Grad 5 gibt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

a) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen, und sei G die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_3)$ mit Einsen auf der Hauptdiagonale. Zeigen Sie, dass G eine nichtabelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ der Ordnung 27 ist.

b) Bestimmen Sie 12 paarweise nicht isomorphe Gruppen der Ordnung 2025.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Zerlegen Sie die Polynome $X^6 - Y^6$ und $X^5Y + X^3Y^3 + XY^5$ im faktoriellen Ring $\mathbb{Q}[X, Y]$ in Primfaktoren.

Hinweis: Es sind jeweils vier Primfaktoren.

b) Finden Sie alle Paare von Polynomen $(f, g) \in \mathbb{Q}[X, Y]^2$ mit

$$f \cdot (X^6 - Y^6) + g \cdot (X^5Y + X^3Y^3 + XY^5) = 0.$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{Z}$ sei $f_a = X^4 + a\,X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Mit $\mathrm{Gal}(f_a)$ werde im Folgenden die Galois-Gruppe des in $\mathbb{C}$ enthaltenen Zerfällungskörpers von f_a über $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

a) Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ nur aus der Identität besteht.

b) Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ nur aus der Identität und der komplexen Konjugation besteht.

c) Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ im Fall $a = -1$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, und sei $N_K : K \longrightarrow \mathbb{Q}$ die Normabbildung, die gegeben ist durch $N_K(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$ für $a, b \in \mathbb{Q}$.

a) Beweisen Sie, dass es zu $x \in R$ und $y \in R \setminus \{0\}$ ein Element $q \in R$ gibt mit $|N_K(\frac{x}{y} - q)| < 1$.

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{x}{y}$ in der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

b) Sei $N_R : R \longrightarrow \mathbb{Z}$ die Einschränkung der Abbildung N_K. Zeigen Sie, dass R bezüglich der Abbildung $|N_R|$ ein euklidischer Ring ist, d. h. zu zwei Elementen $x, y \in R$ mit $y \neq 0$ gibt es Elemente $q, r \in R$ mit $x = qy + r$ und $|N_R(r)| < |N_R(y)|$.