Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Seien $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ die Gaußschen Zahlen und

$$N(a + bi) = a^2 + b^2$$

die übliche Norm. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ist α ein Teiler von β (Notation: $\alpha|\beta$), falls $\beta = \gamma \cdot \alpha$ für ein $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $4 + 5i$ ist ein Teiler von $14 - 3i$.

(b) $3 + 7i$ ist kein Teiler von $10 + 3i$.

(c) Für $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ gilt: $N(\alpha)$ ist gerade $\Leftrightarrow 1 + i$ teilt α.

Aufgabe 2

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Es seien $m \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in K$ gegeben mit

$$f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0,$$

wobei m minimal gewählt ist (d.h. es gibt keine solche Relation mit kleinerem m). Zeigen Sie:

(a) Ist $a_0 = 0$, so ist f nicht invertierbar.

(b) Ist $a_0 \neq 0$, so ist f invertierbar.

Aufgabe 3

Sei $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung. Es sei $\alpha \in L$ mit $K(\alpha) = L$. Zu jedem Zwischenkörper E ist P_E das Minimalpolynom von α über E.

(a) Zeigen Sie, dass $[L : E] = \deg(P_E)$ für jeden Zwischenkörper E gilt.

(b) Seien E und F zwei Zwischenkörper mit $F \subset E$. Zeigen Sie, dass P_E ein Teiler von P_F in $E[X]$ ist.

(c) Sei E ein Zwischenkörper. Sei F der Zwischenkörper erzeugt von den Koeffizienten von P_E. Zeigen Sie, dass $P_E = P_F$ gilt. Folgern Sie daraus, dass $E = F$ ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Gegeben sei die Gruppe der invertierbaren 3×3-Matrizen über dem Körper mit 2 Elementen

$$G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)\,.$$

(a) Verifizieren Sie, dass G die Ordnung 168 hat.

(b) Bestimmen Sie eine 2-Sylow-Gruppe von G.
Hinweis: Betrachten Sie Dreiecksmatrizen in G.

(c) Wie viele 2-Sylow-Gruppen hat G?
Hinweis: Betrachten Sie den Stabilisator einer 2-Sylow-Gruppe.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $K(\alpha,\beta)/K$ eine endliche Galoiserweiterung. Seien weiter $K(\alpha)/K$ und $K(\beta)/K$ Galoiserweiterungen, sowie $K(\alpha) \cap K(\beta) = K$.
Setze $G = \mathrm{Gal}(K(\alpha,\beta)/K(\alpha+\beta))$. Zeigen Sie:

(a) Für $\sigma \in G$ gilt: $\sigma(\alpha) - \alpha = \beta - \sigma(\beta) \in K$.

(b) Es ist $K(\alpha+\beta) = K(\alpha,\beta)$.

Hinweis zu b): Berechnen Sie zunächst $\sigma^j(\alpha)$ unter Verwendung von (a).

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Begründen Sie, dass die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_9$$

in der alternierenden Gruppe A_9 liegt.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi(n)$ für $n \geq 3$ stets gerade ist – hierbei bezeichne φ die Eulersche φ-Funktion.

(c) Begründen Sie, dass in einem Integritätsbereich R aus $e^2 = e$, wobei $e \in R$, stets $e = 0$ oder $e = 1$ folgt.

(d) Bestimmen Sie den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7} \cdot e^{-2\pi i/5}) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und K^K die Menge aller Abbildungen $K \to K$. Es sei die Abbildung

$$\varphi\colon K[X] \to K^K, \quad f \mapsto \varphi(f)$$

betrachtet, wobei $\varphi(f)(x) := f(x)$ für alle $x \in K$. Beweisen Sie:

(a) Genau dann ist φ injektiv, wenn K unendlich ist.

(b) Genau dann ist φ surjektiv, wenn K endlich ist.

Aufgabe 3

Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Eins. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Ist der Ring R kommutativ, und ist $u \in R$ eine Einheit sowie $x \in R$ nilpotent, so ist $u+x$ eine Einheit.

(b) Es sei R der Ring der 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$. Geben Sie mit Begründung ein Beispiel für eine Einheit $u \in R$ und ein nilpotentes Element $x \in R$ derart, dass $u+x$ keine Einheit ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe einer galoisschen Körpererweiterung L/K vom Grad 143 stets zyklisch ist.

(b) Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung vom Grad 55 mit nichtabelscher Galoisgruppe. Zeigen Sie: Es gibt genau einen echten Zwischenkörper M von L/K, sodass M/K eine Galoiserweiterung ist. Berechnen Sie den Grad $[M : K]$.

Aufgabe 5

(a) Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix über K. Zeigen Sie: Es existiert eine endliche Körpererweiterung L/K derart, dass A einen Eigenwert $\lambda \in L$ besitzt.

(b) Begründen Sie, dass $L := \mathbb{Q}[T]/(T^3+T+1)$ ein Körper ist. Zeigen Sie, dass $\alpha := [T] \in L$ ein Eigenwert der linearen Abbildung

$$f\colon L^3 \to L^3, \quad f(u,v,w) := (-w, u-w, v)$$

ist, und geben Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert α an.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

1. Zeigen Sie, dass durch
$$K = (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[T]/(T^3 - 2)$$
ein Körper mit 343 Elementen gegeben wird.

2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der komplexen Zahl $z = \pi + \mathrm{e}i$ über $\mathbf{R}$.

3. Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Polynom
$$f(X) = X^{2021} + 105\,X^{103} + 15\,X + 45$$
über folgenden Körpern K irreduzibel ist:
   (a) $K = \mathbf{Q}$,
   (b) $K = \mathbf{R}$,
   (c) $K = \mathbf{F}_2$,
   (d) $K = \mathbf{Q}[T]/(f(T))$
   (e) Begründen Sie, dass $\mathbf{Q}[T]/(f(T))$ ein Körper ist.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie alle Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynoms $f(X) := X^4 + 2$ über $\mathbf{F}_3$.

2. Berechnen Sie die galoissche Gruppe von $f(X)$ über $\mathbf{F}_3$.

3. Sei α eine Nullstelle von $g(X) := X^4 + 2$ in einem algebraischen Abschluss von $\mathbf{F}_5$. Zeigen Sie, dass dann auch 2α, 3α und 4α Nullstellen von $g(X)$ sind.

4. Zeigen Sie, dass das Polynom $g(X)$ über $\mathbf{F}_5$ irreduzibel ist.

5. Berechnen Sie die galoissche Gruppe von $g(X)$ über $\mathbf{F}_5$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

Seien G eine (endliche) Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf eine weitere Gruppe H.

1. Zeigen Sie, dass H auflösbar ist, wenn G auflösbar ist.
2. Zeigen Sie, dass H entweder trivial oder einfach ist, wenn G einfach ist.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, falls $a^n = 0$ für eine natürliche Zahl n.

1. Begründen Sie, warum in einem Körper das einzige nilpotente Element a das Element $a = 0$ ist.
2. Zeigen Sie, dass das *Nilradikal*

$$\mathfrak{n}\colon = \{a \in R \mid a \text{ ist nilpotent}\}$$

   ein Ideal ist.
3. Zeigen Sie, dass das Nilradikal in jedem Primideal $\mathfrak{p}$ des Ringes R enthalten ist.
4. Berechnen Sie das Nilradikal des (endlichen) Ringes $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, wobei $\ell \geq 1$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 5

1. Geben Sie mit Begründung eine mögliche Abbildungsmatrix des Frobenius-Homomorphismus

$$F\colon \mathbf{F}_{25} \to \mathbf{F}_{25},$$

   aufgefasst als Endomorphismus des $\mathbf{F}_5$-Vektorraumes $\mathbf{F}_{25}$, an.
2. Bestimmen Sie die Anzahl der Unterkörper, die der endliche Körper $\mathbf{F}_{81}$ besitzt.

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1).

(a) Geben Sie die Definition eines *größten gemeinsamen Teilers* zweier Elemente $a, b \in R$ an.

(b) Begründen Sie, dass in einem faktoriellen Ring je zwei Elemente einen größten gemeinsamen Teiler haben.

(c) Begründen Sie, dass je zwei Elemente des Polynomrings $\mathbb{Q}[x, y]$ einen größten gemeinsamen Teiler haben.

Zwei Elemente $a, b \in R$ heißen *teilerfremd*, wenn 1 ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ist. Sie heißen *relativ prim*, wenn es $u, v \in R$ gibt mit $ua + vb = 1$.

(d) Zeigen Sie: Sind $a, b \in R$ relativ prim, dann sind sie auch teilerfremd.

(e) Geben Sie zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ an, die teilerfremd sind, aber nicht relativ prim.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei V ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist. Wir schreiben $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$.

Es seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Der Schwerpunkt $s = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$ ist das eindeutig bestimmte Element $v \in V$, für das $\sum_{j=1}^{n} \|v - v_j\|^2$ minimal wird.

Hinweis: Schreiben Sie v als $v = s + w$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei K ein Körper. Für Polynome $f, g \in K[x]$ sei $f \circ g$ das Polynom $f(g(x))$.

Beweisen Sie oder wiederlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, ob folgende Aussagen für alle Körper K richtig sind.

(a) $\forall f, g \in K[x]\colon (f \text{ irreduzibel} \Longrightarrow f \circ g \text{ irreduzibel})$.

(b) $\forall f, g \in K[x]\colon (f \circ g \text{ irreduzibel} \Longrightarrow f \text{ irreduzibel})$.

(c) $\forall f, g \in K[x]\colon (f \circ g \text{ irreduzibel} \Longrightarrow g \text{ irreduzibel})$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Wir betrachten die additiven Gruppen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Zeigen Sie: Die Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist unendlich, aber jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist endlich.

(b) Sei $A = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto ax + b \mid a = \pm 1, b \in \mathbb{Z}\}$.

Zeigen Sie: A ist eine Gruppe mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung, und diese Gruppe ist isomorph zum semidirekten Produkt der (additiven) Gruppe $\mathbb{Z}$ mit der (multiplikativen) Gruppe $\{\pm 1\}$, wobei $\{\pm 1\}$ auf $\mathbb{Z}$ durch Multiplikation operiert.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$, wobei K eine galoissche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Grad 2021 ist. Zeigen Sie:

(a) Es gibt Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset L_j \subset K$, $j \in \{1, 2\}$, mit $[L_1 : \mathbb{Q}] = 43$ und $[L_2 : \mathbb{Q}] = 47$, die über $\mathbb{Q}$ galoissch sind.

(b) Sei $\alpha \in K$, sodass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt, und sei f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Dann zerfällt f über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe und seien a, b, c Elemente aus G.

(a) Zeigen Sie, dass a und a^{-1} dieselbe Ordnung haben.

(b) Zeigen Sie, dass ab und ba dieselbe Ordnung besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass abc und bca dieselbe Ordnung besitzen.

(d) Geben Sie Elemente a, b, c in der symmetrischen Gruppe S_3 an, so dass abc und bac nicht dieselbe Ordnung besitzen.

(e) Zeigen Sie, dass es in einer nicht kommutativen Gruppe G stets Elemente a, b, c gibt, so dass abc und bac nicht dieselbe Ordnung haben.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass m über $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

(b) Sei $\mathbb{F}_5$ der endliche Körper mit fünf Elementen. Geben Sie einen Körperisomorphismus $\varphi\colon \mathbb{F}_5[\sqrt{2}] \to \mathbb{F}_5[\sqrt{3}]$ explizit an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2.

(a) Zeigen Sie, dass L/K stets normal ist.

(b) Zeigen Sie, dass L/K im Fall $\operatorname{char} K \neq 2$ stets separabel ist.

(c) Geben Sie (mit Begründung) jeweils ein Beispiel für eine separable und eine inseparable Körpererweiterung L/K vom Grad 2 im Fall $\operatorname{char} K = 2$ an.

Hinweis: für den zweiten Teil: Betrachten Sie den rationalen Funktionenkörper $k(T)$ über einem Körper k.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Zu betrachten seien die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\beta)$ von $\mathbb{Q}$, wobei

$$\alpha := \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \beta := i\sqrt{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{C}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α und von β über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie die Grade $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$. Entscheiden Sie, ob die beiden Erweiterungen verschieden sind.

(c) Entscheiden und begründen Sie, ob die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\beta)$ von $\mathbb{Q}$ jeweils normal sind.

(d) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha))$ und $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\beta))$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ deren Automorphismengruppe. Zeigen Sie, dass folgende Abbildung wohldefiniert ist und einen Gruppenhomomorphismus darstellt:

$$c\colon G \to \mathrm{Aut(G)}, \quad g \mapsto [c_g\colon x \mapsto gxg^{-1}].$$

(b) Bezeichne S_3 die symmetrische Gruppe des Grades 3. Beweisen Sie, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(S_3)$ zur Gruppe S_3 isomorph ist.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei S_5 die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und sei $A_5 \leq S_5$ die alternierende Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $U \leq S_5$ eine Untergruppe mit 3 oder 5 Elementen. Dann ist $U \leq A_5$.

(b) S_5 hat genau 10 Untergruppen der Ordnung 3.

(c) S_5 hat genau 6 Untergruppen der Ordnung 5.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen. Wir betrachten die Menge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_p^\times,\ b \in \mathbb{F}_p \right\}$$

von 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

(a) Zeigen Sie, dass $G \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass G eine Gruppe ist.

(c) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, für die G abelsch ist.

(d) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, für die G zu einer symmetrischen Gruppe S_n isomorph ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$. Zeigen Sie:

(a) Das Minimalpolynom f_α der K-linearen Abbildung $\varphi_\alpha\colon L \to L$, $x \mapsto \alpha x$, ist gleich dem Minimalpolynom g_α von α über K.

(b) Ist $L = K(\alpha)$, so stimmen das charakteristische und das Minimalpolynom von φ_α überein.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

(b) Sei $K = \mathbb{F}_2[X]/(f) = \mathbb{F}_2(\alpha)$ mit $\alpha = \bar{X}$ die durch Adjunktion einer Nullstelle von f entstandene algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{F}_2$.

Zeigen Sie, dass α ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $K^\times$ ist.

(c) Zeigen Sie: In $K[X]$ gilt

$$f = (X - \alpha) \cdot (X - \alpha^2) \cdot (X - \alpha^4) \cdot (X - \alpha^8)\,.$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Seien m und n zwei positive ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Für jede positive ganze Zahl a sei $\zeta_a = e^{2\pi i/a} \in \mathbb{C}$; ζ_a ist eine primitive a-te Einheitswurzel. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{mn})$.

(b) $[\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$.

(c) $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$.