Aufgabe H10T3A1

Sei G eine Gruppe der Ordnung 91, die auf einer Menge X mit $|X| = 71$ operiert. Zeigen Sie, dass es mindestens einen Fixpunkt bezüglich dieser Operation gibt.

Lösung:

Nehmen wir an, dass die Operation fixpunktfrei ist. Weil die Bahnlänge ein Teiler der Gruppenordnung ist und wegen $91 = 7 \cdot 13$ sind nur Bahnen der Länge 7, 13 oder 91 möglich. (Die einelementigen Bahnen wären Fixpunkte, die laut Annahme nicht existieren.) Wegen $|X| < 91$ kann es keine 91-elementige Bahn geben. Sei nun k die Anzahl der Bahnen der Länge 7 und ℓ die Anzahl der Bahnen der Länge 13. Weil X disjunkt in die Bahnen der Operation zerfällt, gilt $7k + 13\ell = 71$. Die Gleichung zeigt, dass für ℓ nur die Werte $0, 1, ..., 5$ möglich sind (denn für $\ell = 6$ ist bereits $7k + 13 \cdot 6 \geq 13 \cdot 6 = 78 > 71$). Aber keine der Zahlen $71 - 13\ell$ mit $0 \leq \ell \leq 6$, also keine der Zahlen $71, 58, 45, 32, 19, 6$ ist durch 7 teilbar. Also ist die Gleichung $7k + 13\ell = 71$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ unlösbar. Die Annahme, dass keine Fixpunkte existieren, hat also zu einem Widerspruch geführt.