

Aufgabe H10T2A2

Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G wird *maximal* genannt, wenn G die einzige Untergruppe von G ist, die U echt enthält. Zeigen Sie, dass für $n \geq 4$ jede maximale Untergruppe U von S_n mindestens n Elemente enthält.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, in denen U transitiv bzw. nicht transitiv auf $M_n = \{1, \dots, n\}$ operiert.

Lösung:

Operiert U auf M_n transitiv, dann ist die Bahnlänge $|U(1)|$ gleich n . Bezeichnet U_1 die Stabilisatorgruppe von 1, dann gilt $|U| \geq (U : U_1) \geq |U(1)| = n$. Betrachten wir nun den Fall, dass U auf M_n nicht transitiv operiert. Seien $A_1, \dots, A_k$ die verschiedenen Bahnen der Operation von U auf M_n . Nach Voraussetzung ist $k \geq 2$. Wir definieren

$$A = A_1 \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{i=2}^k A_i.$$

Weil jede Bahn unter der Operation von U erhalten bleibt, gilt $\sigma(A) = A$ und $\sigma(B) = B$ für alle $\sigma \in U$. Damit ist U in der Untergruppe $V = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(A) = A \text{ und } \sigma(B) = B\}$ enthalten. Weil U maximal ist, muss $U = V$ gelten. Um die Größe von V zu bestimmen, zeigen wir, dass die Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow \text{Per}(A) \times \text{Per}(B) \quad , \quad \sigma \mapsto (\sigma|_A, \sigma|_B)$$

ein Gruppen-Isomorphismus ist. Für alle $\sigma, \tau \in V$ gilt wegen $\sigma(A) = A$, $\tau(A) = A$ die Gleichung $(\sigma \circ \tau)|_A = \sigma|_A \circ \tau|_A$, und aus $\sigma(B) = B$, $\tau(B) = B$ folgt ebenso $(\sigma \circ \tau)|_B = \sigma|_B \circ \tau|_B$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \phi(\sigma \circ \tau) &= ((\sigma \circ \tau)|_A, (\sigma \circ \tau)|_B) = (\sigma|_A \circ \tau|_A, \sigma|_B \circ \tau|_B) = \\ &= (\sigma|_A, \sigma|_B)(\tau|_A, \tau|_B) = \phi(\sigma)\phi(\tau). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass ϕ ein Homomorphismus ist. Gilt $\phi(\sigma) = (\text{id}_A, \text{id}_B)$, dann gilt $\sigma|_A = \text{id}_A$ und $\sigma|_B = \text{id}_B$, und aus $A \cup B = M_n$ folgt $\sigma = \text{id}_{M_n}$. Also ist ϕ injektiv. Ist $(\rho, \tau) \in \text{Per}(A) \times \text{Per}(B)$ vorgegeben, dann ist durch

$$\sigma(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{falls } x \in A \\ \tau(x) & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

ein Element aus V gegeben, und es gilt $\phi(\sigma) = (\sigma|_A, \sigma|_B) = (\rho, \tau)$. Damit ist der Nachweis der Isomorphismus-Eigenschaften von ϕ abgeschlossen. Es folgt $|U| = |V| = |\text{Per}(A)| |\text{Per}(B)| = k!(n-k)!$. Wir zeigen nun, dass diese Zahl durch $\geq n$ abgeschätzt werden kann, wobei wir zunächst den Fall $k \in \{1, n-1\}$ betrachten. In diesem Fall ist $k!(n-k)! = (n-1)! \geq (n-1)(n-2)$. Durch die Umformungen

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2) \geq n &\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 \geq n \Leftrightarrow n^2 - 4n + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 \geq 2 \Leftrightarrow (n-2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4 \end{aligned}$$

sieht man, dass die Ungleichung $(n-1)! \geq n$ für $n \geq 4$ erfüllt ist. Betrachten wir nun den Fall $2 \leq k \leq n-k$. Für beliebige natürliche Zahlen $a, b \geq 2$ gilt allgemein $ab \geq a+b$. Setzen wir nämlich o.B.d.A. $a \geq b$ voraus, dann folgt $ab \geq 2a \geq a+b \geq a+b$. Wenden wir dies auf $a = k$ und $b = n-k$ an, dann erhalten wir $k!(n-k)! \geq k(n-k) \geq k + (n-k) = n$ wie gewünscht.