

Aufgabe F10T1A5

Sei $G = \langle a, b \rangle$ mit $\text{ord}(a) = 3$, $\text{ord}(b) = 4$ und $bab^{-1} = a^2$. Zeigen Sie, dass die Gruppen G , A_4 und D_6 paarweise nicht zueinander isomorph sind.

Lösung:

Die Diedergruppe D_6 enthält eine zyklische Untergruppe der Ordnung 6 und damit auch ein Element dieser Ordnung. Dagegen enthält A_4 keine Elemente der Ordnung 6, da solche Elemente noch nicht einmal in S_4 existieren. Also sind D_6 und A_4 nicht isomorph. Damit ein Element in S_4 die Ordnung 6 besitzt, müsste der kgV der Zykellängen in einer disjunkten Zykelzerlegung gleich 6 sein, und dies ist nur möglich, wenn es in der Zerlegung mindestens einen Zykel der Länge 2 und einen Zykel der Länge 3 gibt. Aber dann würde der Träger des Elements bereits $2 + 3 = 5$ Elemente enthalten, was in S_4 nicht möglich ist.

Die Gruppen G und A_4 sind nicht zueinander isomorph, weil in A_4 auch keine Elemente der Ordnung 4 existieren. Die einzigen Elemente in S_4 mit dieser Eigenschaft sind die 4-Zykel, aber diese haben ein negatives Signum und sind damit nicht in A_4 enthalten. Schließlich sind auch D_6 und G nicht isomorph zueinander, da auch D_6 keine Elemente der Ordnung 4 enthält. In D_6 gibt es eine zyklische Untergruppe C_6 der Ordnung 6, diese enthält ausschließlich Elemente der Ordnung 2, 3 und 6. In $D_6 \setminus C_6$ gibt es nur Elemente der Ordnung 2. (Interpretiert man D_6 als Symmetriegruppe des regelmäßigen Sechsecks, so sind die Elemente aus $D_6 \setminus C_6$ die Spiegelungen.)