Aufgabe F10T1A1

Sei G eine endliche einfache Gruppe und H eine echte Untergruppe vom Index $k > 2$. Zeigen Sie, dass die Gruppenordnung $|G|$ ein Teiler von $\frac{1}{2}k!$ ist.

Lösung:

Die Operation von G auf der Menge G/H der Linksnebenklassen durch $g \cdot (hH) = (gh)H$ für $g \in G$ und $h \in H$ liefert einen Homomorphismus $\psi : G \rightarrow \text{Per}(G/H)$ gegeben durch $\psi(g)(hH) = (gh)H$ für $g \in G, h \in H$. Wegen $|G/H| = (G : H) = k$ gibt es Bijektion $\phi : G/H \rightarrow M_k$, wobei $M_k = \{1, \dots, k\}$ ist. Diese Bijektion liefert einen Isomorphismus $\hat{\phi} : \text{Per}(G/H) \rightarrow S_k$, der durch $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ gegeben ist. Insgesamt ist $\varphi = \hat{\phi} \circ \psi$ damit ein Homomorphismus von G nach S_k .

Weil G einfach und $\ker(\varphi)$ ein Normalteiler von G ist, muss $\ker(\varphi) = G$ oder $\ker(\varphi) = \{e_G\}$ gelten. Nehmen wir an, dass $\ker(\varphi) = G$ gilt. Dann folgt $(\hat{\phi} \circ \psi)(g) = \varphi(g) = \text{id}$ für alle $g \in G$. Weil $\hat{\phi}$ ein Isomorphismus und damit insbesondere injektiv ist, folgt $\psi(g) = \text{id}_{G/H}$ für alle $g \in G$, also $(gh)H = \psi(g)(hH) = \text{id}_{G/H}(hH) = hH$ für alle $g \in G$ und $h \in H$. Insbesondere gilt $gH = H$, also $g \in H$ für alle $g \in G$. Dies würde $G = H$ bedeuten, was aber der Voraussetzung $(G : H) = k > 2$ widerspricht. Also muss $\ker(\varphi) = \{e_G\}$ gelten, der Homomorphismus φ ist also injektiv.

Wir betrachten nun den Homomorphismus $\text{sgn} \circ \varphi : G \rightarrow \{\pm 1\}$. Weil G einfach ist, muss wiederum entweder $\ker(\text{sgn} \circ \varphi) = G$ oder $\ker(\text{sgn} \circ \varphi) = \{e_G\}$ gelten. Im zweiten Fall wäre $\text{sgn} \circ \varphi$ eine injektive Abbildung in eine zweielementige Menge. Dies ist unmöglich, denn G besitzt eine Untergruppe vom Index $k > 2$, weshalb auch $|G| > 2$ gelten muss. Damit bleibt nur die Möglichkeit $\ker(\text{sgn} \circ \varphi) = G$, also $\text{sgn}(\varphi(g)) = +1$ für alle $g \in G$. Dies zeigt, dass φ eine injektive Abbildung in die alternierende Gruppe A_k ist. Also ist G isomorph zu einer Untergruppe von A_k , folglich ist $|G|$ ein Teiler von $|A_k| = \frac{1}{2}k!$.