Aufgabe F07T2A1

Gegeben seien die Gruppen S_4, D_{12}, $D_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(a) Bestimmen Sie in jeder Gruppe die Anzahl der Elemente der Ordnung 2.

(b) Welche der Gruppen sind isomorph zueinander, und welche nicht?

Lösung:

zu (a) Ein Element in S_4 ist genau dann von Ordnung 2, wenn der kgV der Zykellängen in der disjunkten Zykelzerlegung des Elements gleich 2 ist. Dies ist in S_4 genau für die sechs Transpositionen und die drei Doppeltranspositionen der Fall. Insgesamt gibt es also $6 + 3 = 9$ Elemente der Ordnung zwei.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Diedergruppe D_n eine zyklische Untergruppe C_n der Ordnung n besitzt, und dass die Elemente aus $D_n \setminus C_n$ alle von Ordnung 2 sind. (Interpretiert man die Elemente aus D_n als die Symmetrieoperationen des regelmäßigen n-Ecks, so sind die Elemente aus C_n die Drehungen um ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{2\pi}{n}$, und die Elemente D_n sind die Spiegelungen.) Ist $n = 12$, dann gibt es in der zyklischen Untergruppe C_{12} genau eine Untergruppe der Ordnung 2, und damit auch genau ein Element dieser Ordnung. In $D_{12} \setminus C_{12}$ gibt es 12 weitere Elemente der Ordnung 2. Insgesamt enthält D_n also $1 + 12 = 13$ Elemente der Ordnung 2.

In der Untergruppe D_6 gibt es genau 7 Elemente der Ordnung 2, nämlich genau eines in C_6 und 6 in der Menge $D_6 \setminus C_6$. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besitzt ein Element der Ordnung 1 und ein Element der Ordnung 2. Allgemein gilt: Ist $g \in G$ ein Element in einer Gruppe G der Ordnung m, und ist $h \in H$ ein Element der Gruppe H mit Ordnung n, dann hat das Element (m, n) von $G \times H$ die Ordnung $\text{kgV}(m, n) = 2$. Somit hat ein Element $(\sigma, \bar{a}) \in D_6 \times D_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ genau dann Ordnung 1 oder 2, wenn Ordnung von σ und von $\bar{a}$ gleich 1 oder 2 ist. In D_6 gibt es $7 + 1 = 8$, in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ genau zwei Elemente von Ordnung 2, also sind in $D_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ genau $8 \cdot 2 = 16$ Element von Ordnung 1 oder 2. Weil das Neutralelement das einzige Element der Ordnung 1 ist, gibt es $16 - 1 = 15$ Elemente der Ordnung 2 in $D_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

In der Gruppe S_3 sind die einzigen Elemente der Ordnung 1 oder 2 neben dem Neutralelement die drei Transpositionen, insgesamt kommen wir hier also auf $1 + 3 = 4$ Elemente. In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ haben alle vier Elemente Ordnung 1 oder 2. Also gibt es in $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ insgesamt $4 \cdot 4 = 16$ Elemente der Ordnung 1 oder 2, und damit $16 - 1 = 15$ Elemente der genauen Ordnung 2.

zu (b) Zwei Gruppen können nur dann zueinander isomorph sein, wenn die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in beiden Gruppe übereinstimmt. Also sind aus unserer Liste keine zwei Gruppen zueinader isomorph außer eventuell $D_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir zeigen nun, dass diese beiden Gruppen isomorph sind, indem wir beweisen, dass $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Diedergruppe D_6 durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist: Wird eine Gruppe G von einer zweielementigen Menge $\{g, h\}$ erzeugt, wobei $\text{ord}(g) = 6$, $\text{ord}(h) = 2$ ist und $hgh = g^{-1}$ gilt, dann ist G isomorph zu D_6. Wir überprüfen, dass $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ diese Eigenschaften besitzt und betrachten dazu die Elemente $g = ((1\ 2\ 3), \bar{1})$ und $h = ((1\ 2), \bar{0})$. Wegen $\text{ord}((1\ 2\ 3)) = 3$ und $\text{ord}(\bar{1}) = 2$ gilt $\text{ord}(g) = \text{kgV}(3, 2) = 6$, und aus $\text{ord}((1\ 2)) = 2$, $\text{ord}(\bar{0}) = 1$ folgt $\text{kgV}(2, 1) = 2$. Außerdem gilt

$$ghg \quad = \quad ((1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2), \bar{0}) \quad = \quad ((1\ 3\ 2), \bar{1}) \quad = \quad g^{-1}.$$

Damit ist $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bewiesen.