Aufgabe F06T2A5

(a) Zeigen Sie: Eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat, ist abelsch.

(b) Sei G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8, die (mindestens) zwei verschiedene Elemente der Ordnung 2 enthält. Zeigen Sie: Dann ist G isomorph zur Diedergruppe D_4, der Symmetriegruppe des regelmäßigen Vierecks.

Lösung:

zu (a) Sei G eine Gruppe mit der angegebenen Eigenschaft, mit Neutralelement e_G. Dann gilt $g^2 = e_G$, also $g = g^{-1}$ für alle $g \in G$. Für alle $g, h \in G$ gilt somit $g \cdot h = (g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1} = h \cdot g$. Dies zeigt, dass G abelsch ist.

zu (b) Laut Vorlesung ist eine Gruppe der Ordnung 8 isomorph zu D_4, wenn sie von zwei Elementen g, h erzeugt wird, die außerdem die Gleichungen $g^4 = h^2 = hghg = e$ erfüllen, wobei e das Neutralelement bezeichnet. Unser Ziel besteht darin, diese Eigenschaften für die Gruppe G aus der Aufgabenstellung nachzuweisen. Wären alle Elemente in G von Ordnung 2, dann wäre G nach Teil (a) abelsch, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es ein Element $g \in G$ der Ordnung 4. Das Element g^2 ist in $\langle g \rangle$ das einzige Element der Ordnung 2. Nach Voraussetzung gibt es also ein Element $h \notin \langle g \rangle$ der Ordnung 2. Die Untergruppe $\langle \{g, h\} \rangle$ enthält bereits mehr als vier Elemente, also muss $G = \langle \{g, h\} \rangle$ gelten. Wegen $(G : \langle g \rangle) = 2$ ist $\langle g \rangle$ ein Normalteiler von G. Daraus folgt $hgh = hgh^{-1} \in \langle g \rangle$. Weil sich durch Konjugation mit h die Ordnung des Elements g nicht ändert, muss hgh ein Element der Ordnung 4 in $\langle g \rangle$ sein. Die einzigen beiden Elemente der Ordnung 4 in $\langle g \rangle$ sind g und g^{-1}, also muss

$$hgh = g \qquad \text{oder} \qquad hgh = g^1 \qquad \text{gelten.}$$

Im ersten Fall wäre $hg = gh$. Die beiden Elemente des Erzeugendensystems $\{g, h\}$ von G sind also miteinander vertauschbar, und das würde bedeuten, dass G insgesamt abelsch ist. (Der Zentralisator von g enthält mit g, h die gesamte Gruppe, liegt also im Zentrum $Z(G)$. Dasselbe gilt auch für das Element h. Damit folgt $Z(G) \supseteq \langle \{g, h\} \rangle = G$.) Also kann dieser Fall ausgeschlossen werden. Es bleibt somit nur die Möglichkeit $hgh = g^{-1} \Leftrightarrow hghg = e$. Damit sind alle oben genannten Voraussetzungen für $G \cong D_4$ erfüllt.