

Aufgabe F06T2A3

- (a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ist. (Dabei bezeichnet $\mathbb{R}^+$ die positiven reellen Zahlen.)
- (b) Beweisen Sie, dass die additive Gruppe $(K, +)$ eines Körpers K niemals isomorph zur multiplikativen Gruppe $(K^\times, \cdot)$ von K ist.

Lösung:

zu (a) Laut Analysis-Vorlesung erfüllt die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Damit ist $\exp$ ein Gruppen-Homomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Weil die Exponentialfunktion $\exp$ als Umkehrabbildung die Logarithmus-Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, ist $\exp$ bijektiv und damit sogar ein Isomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, \cdot)$.

zu (b) Betrachten wir zunächst den Fall $\text{char}(K) = 0$. Für jedes Element $\alpha \in K \setminus \{0_K\}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n_K = n \cdot 1_K \neq 0_K$ und somit die Implikation

$$n\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad n_K \cdot \alpha = 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha = n_K^{-1} n_K \alpha = 0_K.$$

Also hat jedes Element ungleich 0_K in K unendliche Ordnung. Andererseits gibt es in $(K^\times, \cdot)$ mit -1_K ein Element der Ordnung 2, denn es gilt $1_K \neq -1_K$ und $(-1_K)^2 = 1_K$. Wäre $(K, +)$ isomorph zu $(K^\times, \cdot)$, dann müsste auch in $(K, +)$ ein Element der Ordnung 2 existieren.

Betrachten wir nun den Fall, dass $p = \text{char}(K)$ eine ungerade Primzahl. Für jedes Element $\alpha \neq 0_K$ gilt dann $p\alpha = 0_K$, also hat jedes Element ungleich dem Neutralelement in $(K, +)$ die Ordnung p . Sei $\mathbb{F}_p \subseteq K$ der Primkörper von K . Dann ist die Untergruppe $(\mathbb{F}_p^\times, \cdot)$ laut Vorlesung zyklisch von Ordnung $p-1$. Also gibt es in $(K^\times, \cdot)$ ein Element der Ordnung $p-1$, und wegen $p \geq 3$ ist $1 < p-1 < p$. Da in $(K, +)$ kein Element der Ordnung $p-1$ existiert, kann die Gruppe $(K, +)$ in diesem Fall also nicht zu $(K^\times, \cdot)$ isomorph sein.

Betrachten wir nun den Fall $p = 2$. Weil K mindestens zwei Element enthält, gibt es in der Gruppe $(K, +)$ mindestens ein nichttriviales Element, und wie im Fall $p > 2$ überprüft man, dass jedes nichttriviale Element der Gruppe von Ordnung 2 ist. Aber ein Element dieser Ordnung existiert nicht in $(K^\times, \cdot)$. Ist nämlich $\alpha \in K^\times$ von endlicher Ordnung, dann erfüllt α eine Gleichung der Form $\alpha^m = 1_K$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass α algebraisch über dem Primkörper $\mathbb{F}_2$ ist und die Erweiterung $\mathbb{F}_2(\alpha)|\mathbb{F}_2$ folglich einen endlichen Grad r besitzt. Es ist dann $\mathbb{F}_2(\alpha)$ ein Körper mit 2^r Elementen, und $\mathbb{F}_2(\alpha)^\times$ ist eine Gruppe der Ordnung $2^r - 1$. Weil $2^r - 1$ ungerade und die Ordnung von α in $\mathbb{F}_2(\alpha)^\times$ nach dem Satz von Lagrange ein Teiler von $2^r - 1$ ist, handelt es sich bei α um ein Element ungerader Ordnung in $\mathbb{F}_2(\alpha)^\times$ und somit auch in $K^\times$. Also gibt es in $K^\times$ tatsächlich kein Element der Ordnung 2, und somit ist $K^\times$ nicht zu $(K, +)$ isomorph.