

Aufgabe F03T1A5

Sei p eine Primzahl und C_p eine zyklische Gruppe der Ordnung p . Bestimmen Sie die Anzahl der Automorphismen von $C_p \times C_p \times C_p$.

Lösung:

Die Gruppe C_p ist isomorph zur additiven Gruppe $(\mathbb{F}_p, +)$, wobei $\mathbb{F}_p$ den bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Körper mit p Elementen bezeichnet. Folglich ist $C_p \times C_p \times C_p$ isomorph zur additiven Gruppe $(\mathbb{F}_p^3, +)$ des $\mathbb{F}_p$ -Vektorraums $\mathbb{F}_p^3$. Jeder $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum-Automorphismus von $\mathbb{F}_p^3$ ist nach Definition auch ein Automorphismus der Gruppe $(\mathbb{F}_p^3, +)$. Umgekehrt ist jeder Automorphismus von $(\mathbb{F}_p^3, +)$ ein $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum-Automorphismus. Denn für alle $v \in \mathbb{F}_p^3$ und $a \in \mathbb{Z}$ gilt $av = \bar{a}v$, wobei av die a -fache Summe von v in $\mathbb{F}_p^3$ und $\bar{a}$ das Bild von a in $\mathbb{F}_p^3$ bezeichnet. Ist nun $\phi : \mathbb{F}_p^3 \rightarrow \mathbb{F}_p^3$ ein Automorphismus der Gruppe $(\mathbb{F}_p^3, +)$, dann gilt

$$\phi(\bar{a}v) = \phi(av) = a\phi(v) = \bar{a}\phi(v)$$

für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $v \in V$. Dies zeigt, dass ϕ nicht nur ein Gruppen-, sondern auch ein Vektorraum-Automorphismus ist. Die Gruppe der $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum-Automorphismen von $\mathbb{F}_p^3$ ist isomorph zu $\text{GL}_3(\mathbb{F}_p)$, der Gruppe der invertierbaren 3×3 -Matrizen über $\mathbb{F}_p$. Insgesamt gilt also

$$\text{Aut}(C_p \times C_p \times C_p) \cong \text{Aut}(\mathbb{F}_p^3, +) \cong \text{GL}_3(\mathbb{F}_p).$$

Unsere Aufgabe besteht also darin, die invertierbaren 3×3 -Matrizen zu zählen. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{F}_p)$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}_p^3$ von A eine (geordnete) Basis von $\mathbb{F}_p^3$ bilden. Für die Wahl von v_1 gibt es $p^3 - 1$ Möglichkeiten, denn jeder Vektor mit Ausnahme des Nullvektors kann gewählt werden. Liegt v_1 fest, dann gibt es $p^3 - p$ Möglichkeiten, den Vektor v_2 aus $\mathbb{F}_p^3 \setminus \langle v_1 \rangle$ zu wählen. Für den Vektor v_3 bleiben schließlich noch $p^3 - p^2$ Möglichkeiten, denn dies ist die Anzahl der Vektoren in $\mathbb{F}_p^3 \setminus \langle \{v_1, v_2\} \rangle$. Insgesamt gibt es also

$$(p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2) = p^3(p^3 - 1)(p^2 - 1)(p - 1)$$

geordnete Basen von $\mathbb{F}_p^3$, also ist dies auch die Anzahl der Automorphismen von $C_p \times C_p \times C_p$.