Aufgabe F01T1A2

Eine Gruppe G heißt *torsionsfrei*, wenn ihr Neutralelement e_G das einzige Element endlicher Ordnung ist. Eine abelsche Gruppe $(G,+)$ ist *vom Rang 1*, wenn für alle $g,h \in G$ jeweils $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und $ax + by = 0_G$ existieren.

(a) Sei $(G,+)$ abelsch vom Rang 1 und torsionsfrei. Zeigen Sie, dass dann ein Monomorphismus $\phi : (G,+) \to (\mathbb{Q},+)$ von Gruppen existiert.

(b) Sei $(G,+)$ eine torsionsfreie Gruppe mit der Eigenschaft, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von G zyklisch ist. Zeigen Sie, dass auch in diesem Fall ein Monomorphismus $\phi : (G,+) \to (\mathbb{Q},+)$ existiert.

(c) Beweisen Sie, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q},+)$ zyklisch ist.

Lösung:

zu (a) Der schwierige Teil bei dieser Aufgabe ist die Konstruktion von ϕ. Wir gehen davon aus, dass $G \neq \{0_G\}$ ist, denn ansonsten kann $\phi : G \to \mathbb{Q}$ einfach durch $\phi(0_G) = 0$ definiert werden und ist damit offenbar injektiv. Sei nun $x_0 \in G \setminus \{0_G\}$ beliebig gewählt. Für jedes $y \in G$ gibt es nach Voraussetzung Elemente $a,b \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$ mit $ax_0 + by = 0_G$. Wäre $b = 0$, dann würde $ax = 0_G$ mit $a \neq 0$ und $x \neq 0_G$ folgen, was der Torsionsfreiheit widerspricht. So aber können wir ϕ auf dem Element y durch $\phi(y) = -\frac{a}{b}$ definieren.

Wir zeigen, dass diese Unabhängig von der Wahl der Gleichung ist. Nehmen wir dazu an, dass x und y eine weitere Gleichung der Form $a'x_0 + b'y = 0_G$ mit $(a',b') \neq (0,0)$ erfüllen. Zu zeigen ist dann, dass $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ gilt. Aus $ax_0 + by_0 = 0$ und $a'x_0 + b'y_0 = 0$ folgt

$$a'ax_0 + a'by = 0_G \qquad \text{und} \qquad aa'x_0 + ab'y = 0_G.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhalten wir $(a'b - ab')y = 0_G$. Ist $y = 0_G$, dann folgt $ax_0 = 0_G$, somit $a = 0$ und $-\frac{a}{b} = -\frac{0}{b} = 0$. Ebenso erhält man $a' = 0$ und $-\frac{a'}{b'} = -\frac{0}{b'} = 0$. Insgesamt folgt $-\frac{a}{b} = 0 = -\frac{a'}{b'}$. Im Fall $y \neq 0_G$ folgt $a'b - ab' = 0$ aus der Torsionsfreiheit, was zu $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $-\frac{a'}{b'} = -\frac{a}{b}$ umgeformt werden kann.

Nun überprüfen wir, dass ϕ ein Homomorphismus ist. Seien $y,y' \in G$ vorgegeben und $ax_0 + by = 0_G$, $a'x_0 + b'y' = 0_G$ zugehörige Gleichungen mit $a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$, $(a',b') \neq (0,0)$. Dann gilt auch $ab'x_0 + bb'y = 0_G$ und $a'bx_0 + bb'y' = 0_G$, also insgesamt $(ab' + a'b)x_0 + bb'(y + y') = 0_G$ und somit nach Definition

$$\phi(y + y') \quad = \quad \frac{-(ab' + a'b)}{bb'} \quad = \quad \left(-\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{a'}{b}\right) \quad = \quad \phi(y) + \phi(y').$$

Schließlich beweisen wir noch die Injektivität. Sei $y \in G$ mit $\phi(y) = 0$. Dann gibt es nach Definition von ϕ ein $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ mit $0 \cdot x_0 + by = 0_G$. Aus der Torsionsfreiheit folgt $y = 0_G$.

zu (b) Nach Teil (a) genügt es zu zeigen, dass $(G,+)$ vom Rang 1 ist. Seien $x,y \in G$ vorgegeben. Dann ist nach Voraussetzung die Untergruppe $S = \langle \{x,y\} \rangle$ zyklisch, es gibt also ein $z \in G$ mit $S = \langle z \rangle$. Wegen $x,y \in S$ gibt es dann $c,d \in \mathbb{Z}$ mit $x = cz$ und $y = dz$. Es folgt $dx + (-c)y = cdz - cdz = 0_G$. Setzen wir also $a = d$ und $b = -c$, dann ist $ax + by = 0_G$ erfüllt. Im Fall $a = b = 0$ folgt $c = d = 0$ und damit auch $x = y = 0_G$. In diesem Fall ist die Gleichung $ax + by = 0_G$ für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ erfüllt, beispielsweise auch für $a = b = 1$.

zu (c) Sei U eine endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q},+)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$ mit $U = \langle \{r_1, ..., r_n\} \rangle$. Sei $r_i = \frac{a_i}{b_i}$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$b = \prod_{i=1}^{n} b_i \quad \text{und} \quad c_i = \prod_{j \neq i} b_j \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dann gilt $b_i c_i = b$ und $\frac{a_i}{b_i} = a_i c_i \frac{1}{b}$, also insbesondere $r_i = \frac{a_i}{b_i} \in \langle \frac{1}{b} \rangle$ für $1 \leq i \leq n$. Aus $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq \langle \frac{1}{b} \rangle$ folgt $U \subseteq \langle \frac{1}{b} \rangle$. Also ist U Untergruppe einer zyklischen Gruppe. Laut Algebra-Vorlesung ist jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe selbst zyklisch.