Aufgabe F00T3A2

Sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler der Gruppenordnung. Außerdem setzen wir voraus, dass G einen Normalteiler N der Ordnung p besitzt. Zeigen Sie, dass G ein nichttriviales Zentrum hat. *Hinweis:* Betrachten Sie die Operation von G auf N .

Lösung:

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass G auf sich selbst durch Konjugation, also durch die Abbildung $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$, operiert. Weil N ein Normalteiler von G ist, gilt $g * n = gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und $n \in N$. Durch Einschränkung von $*$ auf $G \times N$ erhalten wir also eine Abbildung $G \times N \rightarrow N$, die weiterhin die Eigenschaften einer Gruppenoperation besitzt. Also operiert G auch auf N durch Konjugation.

Sei nun $R' \subseteq N$ ein Repräsentantensystem der Bahnen dieser Operation und F die Fixpunktmenge. Auf Grund der Bahngleichung gilt

$$|N| = |F| + \sum_{n \in R'} (G : G_n) \quad ,$$

wobei G_n jeweils die Stabilisatorgruppe von n bezeichnet. Die Zahlen $(G : G_n)$ sind Teiler > 1 der Gruppenordnung $|G|$, insbesondere gilt $(G : G_n) \geq p$ für alle $n \in R'$. Die Fixpunktmenge F ist genau der Durchschnitt $N \cap Z(G)$ von N mit dem Zentrum $Z(G)$ der Gruppe. Ein Element $n \in N$ liegt nämlich genau dann in F , wenn $gng^{-1} = n$ für alle $g \in G$ gilt. Dies ist nach Definition äquivalent dazu, dass n in $Z(G)$ liegt. Die Menge $N \cap Z(G)$ enthält zumindest das Neutralelement e der Gruppe. Aus $|N| = p$ und $(G : G_n) \geq p$ für alle $n \in R'$ folgt deshalb $R' = \emptyset$ und $N = F = N \cap Z(G)$, also $N \subseteq Z(G)$. Wegen $|N| = p \geq 1$ ist $Z(G)$ also nichttrivial.