

§ 3. Systeme linearer Differenzialgleichungen

Definition (3.1)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Abbildung von I in den Raum der reellen $n \times n$ -Matrizen. Sei $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein **lineares System** von Differentialgleichungen. Ist die Funktion b konstant Null, dann spricht man von einem **homogenen**, sonst von einem **inhomogenen** System.

Häufig betrachtet man auch **$\mathbb{C}$ -wertige Systeme**, mit

$$A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}} \quad \text{und} \quad b : I \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Beispiel: lineare Systeme in Dimension 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$y' = A(x)y + b$ in ausgeschriebenener Form:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{12}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31}(x) & \dots & a_{33}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ b_3(x) \end{pmatrix} \iff$$

$$y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + a_{13}(x)y_3 + b_1(x)$$

$$y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + a_{23}(x)y_3 + b_2(x)$$

$$y_3' = a_{31}(x)y_1 + a_{32}(x)y_2 + a_{33}(x)y_3 + b_3(x)$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Satz (3.2)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine **eindeutig bestimmte** Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des Systems

$$y' = A(x)y + b(x)$$

mit $\varphi(a) = c$.

$$y_2' = a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2 + a_{23}(x) y_3 + b_2(x)$$

Beweis von Satz 3.2

geg $y' = A(x)y + b$, $A: I \rightarrow M_{n,K}$, $b: I \rightarrow K^n$
 $a \in I$, $c \in K^n$

(1) Eindeutigkeit einer Lösung $\varphi: I \rightarrow K^n$ mit $\varphi(a) = c$
 z.zg: Die rechte Seite des Systems genügt einer lokalen
 Lipschitz-Bed.

Sei $K \subseteq I$ ein kompaktes Teilintervall $K \subseteq I$ für bel. $v \in K^n$
 und $L = \sup \{ \|A(x)\| \mid x \in K \}$ $\|A(x)v\| \leq \|A(x)\| \|v\|$

L Operatornorm / Zeilensummennorm. ∞ -Norm

L ist endlich, da K kompakt und Normfkt. stetig sind

Setze $f(x,y) = A(x)y + b(x)$. Dann gilt für alle $x \in K$

und alle $y, z \in K^n$ jeweils $\|f(x,y) - f(x,z)\| =$

$$\|A(x)y + b(x) - (A(x)z + b(x))\| = \|A(x)(y-z)\| \leq \|A(x)\| \|y-z\|$$

$\leq L \|y - z\|$ lokale L-Bed. erfüllt
 $\Rightarrow$ Eindeutigkeit der Lösung

(2) Existenz einer Lösung (auf ganz I)

Satz 1.10 $\Rightarrow \exists!$ maximales Intervall $J \subseteq K$
 mit $a \in J$ und eine eind. best. Lsg.

$\varphi: J \rightarrow \mathbb{K}^n$ und $\varphi(a) = c$

(K nun bel. kompaktes Teilintervall mit $a \in K$)

Ang. $\sup J < \sup(K)$ Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$L\delta < 1$ und $\sup J + \delta < \sup K$

außerdem $a_1 \in J$ mit $a_1 + \delta > \sup J$.

siehe Bew. von Satz 1.9 $\Rightarrow$

Beweis

$z = z_g$ da

"(iii) $\Rightarrow$ (i)

"(ii) $\Rightarrow$ (i)

$\Rightarrow \left(\sum_{d=1}^m \right)$

$\Rightarrow$ (ii)

$\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)$

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" A

$\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)$

$\in K$, nicht

$\exists$ Lösung $\varphi:]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$ mit
 $\varphi(a_1) = \varphi(a_1)$ Eindeutigkeit $\Rightarrow$
 φ und ψ stimmen auf ganz I überein
 $\rightarrow$ erhalten die Lsg. auf $] \inf I, a_1 + \delta[$
 $\hookrightarrow$ zur Maximalität von I also $\sup I = \sup K$
 analog: $\inf I = \inf K$
 damit gezeigt: φ kann auf das Innere von
 jedem kompakten Teilintervall von I ausgedehnt
 werden, wg. der Eindeutigkeit auf ganz I
 $\square$

Satz (3.3)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{L}_0$ die Menge aller Lösungen von $y' = A(x)y$ auf dem Intervall I . Dann ist $\mathcal{L}_0$ ein **n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum**. Ist $m \in \mathbb{N}$, dann sind für ein m -Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ von Lösungen die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sind linear unabhängig.
- (ii) Es gibt ein $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.
- (iii) Für alle $a \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig.

Ein Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ mit diesen Eigenschaften wird **Fundamentalsystem von Lösungen** genannt.

Beweis von Satz 3.3.

$$y' = A(x) y$$

z.zg. äquivalent: (i) φ_j lin. unabh. (ii) $\exists a: \varphi_j(a) \in \mathbb{K}$

(iii) $\forall a: \varphi_j(a) \in \mathbb{K}$

"(iii) $\Rightarrow$ (ii)" trivial

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j = 0$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j \right)(a) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(a) = 0_{\mathbb{K}^n}$$

mit $a \in \mathbb{K}^+$ $\xrightarrow{\text{wegen (ii)}}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ also: $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ lin. unabh.

$\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ lin. unabh.

"(i) $\Rightarrow$ (iii)" Ang., es gibt ein $a \in I$, so dass

$\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ linear abhängig $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$

$\in \mathbb{K}$, nicht alle null, mit $\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(a) = 0_{\mathbb{K}^n}$

Mit $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ist auch $\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j$ eine Lösung
 von $y' = A(x)y$, und zwar eine $\neq 0$ (da $\varphi_1, \dots, \varphi_m$
 lin. unabh. n. V.) (dann $\varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j \rightarrow$
 $\varphi' = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j' = \sum_{j=1}^m \lambda_j A \varphi_j = A \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j \right)$
 $= A \varphi \Rightarrow \varphi$ löst $y' = Ay$) Nach Def. gilt
 $\varphi(a) = 0 \in \mathbb{K}^n$, diese Eigenschaft hat auch die
 Nulllösung von $y' = Ay$ Eindeutig nach Satz 3.2
 $\Rightarrow \varphi = 0$ ($\Downarrow$) ($\Rightarrow$ Äquivalenz von (i), (ii), (iii))

noch z.zg.: Lösungsraum = n -dim. $\mathbb{K}$ -Vektorraum
 Bereits überprüft: Lösungen abgeschlossen unter
 $\mathbb{K}$ -Linearkombinationen $\Rightarrow \mathcal{L}_0$ ist $\mathbb{K}$ -Vektorraum
 Existenz in Satz 3.2. Für bel. gewähltes $a \in I$
 gibt es eind. best. Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$

mit $\varphi_j(a) = e_j$ (Einheitsvektor) $1 \leq j \leq n$

$e_1, \dots, e_n$ lin. unabh. Äquivalenz $\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n$ lin. unabh.

$\Rightarrow \dim L_0 \geq n$ Ang. $\dim L_0 > n \rightarrow \exists$ Lsg ψ , so

dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ lin. unabh. Äquivalenz $\Rightarrow$

$\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a), \psi(a)$ lin. unabh. in K^n $\nmid$ da $\dim K^n = n$. $\square$

Zusammenhang zwischen homogenen und inhomogenen Lösungen

Satz (3.4)

Sei $y' = A(x)y + b(x)$ eine inhomogene lineare DGL, $\mathcal{L}$ die Menge ihrer Lösungen und $\mathcal{L}_0$ der $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Lösungen von $y' = A(x)y$. Ist $\psi_0 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, dann gilt

$$\mathcal{L} = \psi_0 + \mathcal{L}_0.$$

Bestimmung einer inhomogenen Lösung

Satz (3.5)

Sei $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes lineares System von Differentialgleichungen und Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Dann erhält man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) \quad \text{mit} \quad u(x) = \int_a^x \Phi(t)^{-1}b(t) \, dt.$$

Beweis von Satz 3.5 $y' = A(x)y + b(x)$

geg. $\Psi(x) = \Phi(x)u(x)$, $u(x) = \int_a^x \Phi(t)^{-1}b(t)dt$
z.zg. Ψ löst (*)

$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\Phi(x)$ invertierbar für jedes $x \in I$,
 $\quad \quad \quad \uparrow$ Spalten

weil $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ lin. unabh. $\forall x \in I$ nach Satz 3.3

$\varphi_j'(x) = A(x)\varphi_j(x)$ für $1 \leq j \leq n \Rightarrow$

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) \quad \forall x \in I \Rightarrow u'(x) = \Phi(x)^{-1}b(x)$$

$$\Psi(x) = \Phi(x)u(x)$$

$$\Rightarrow \Psi'(x) = \Phi'(x)u(x) + \Phi(x)u'(x)$$

$$(AB)'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$$

$\uparrow$ Produktregel, für matrixwertige Fkt. gültig.

$$\begin{aligned}\Phi'(x) u(x) + \Phi(x) \Phi(x)^{-1} b(x) &= \Phi'(x) u(x) + b(x) \\ &= A(x) \Phi(x) u(x) + b(x) = A(x) \psi(x) + b(x) \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel: $y_1' = -\omega y_2$, $y_2' = \omega y_1 + x$, $\omega \in \mathbb{R}^+$

äquivalent: $y' = A(x) y + b(x)$ mit $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

Beh. (φ_1, φ_2) mit $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix}$

ist ein Fundamentalsystem von Lsg. von $y' = A(x) y$

$$\varphi_1'(x) = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega x) \\ \omega \cos(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix} = A(x) \varphi_1(x) \quad \checkmark$$

$$\varphi_2'(x) = \begin{pmatrix} -\omega \cos(\omega x) \\ -\omega \sin(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix} \quad \text{B}$$

$$= A(x) \varphi_2(x)$$

Nach Satz 3.3 folgt die lin. Unabh.

bereits aus der lin. Unabh. von

$\varphi_1(0), \varphi_2(0)$. Diese ist geg., dann

$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind lin.

unabh. in $\mathbb{R}^2$ ($\Rightarrow$ Beh.)

(2) Bestimmung eines allgem. Lsg.
durch Variation der Konstanten

zu l

Dann

φ ist

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \\ \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x)^{-1} b(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin(\omega x) \\ x \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin(t) \\ t \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\int_0^x t \sin(t) dt = \left[-t \cos(t) \right]_0^x + \int_0^x \cos(t) dt$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \uparrow \\ [-t \cos(t) + \sin(t)]_0^x = \sin(x) - x \cos(x) \end{matrix}$$

$$\int_0^x t \cos(t) dt = \left[\sin(x) - x \cos(x) \right] - 1$$

$$\Rightarrow u(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) - x \cos(x) \\ x \sin(x) + \cos(x) - 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} -x + \sin(x) \\ 1 - \cos(x) \end{pmatrix}$$

ist spezielle Lsg. des inhom. Systems $\square$

$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$

$x \in$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lineare DGLs höherer Ordnung

Definition (3.6)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ für $0 \leq k < n$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

eine **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung**. Diese wird als **homogen** bezeichnet, wenn $b = 0$ ist, ansonsten als **inhomogen**.

Der Lösungsraum linearer DGLs höherer Ordnung

Satz (3.7)

Gegeben sei eine lineare DGL n -ter Ordnung. Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0$ der homogenen linearen DGL ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Ein System $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Lösungen der homogenen DGL ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $x \in I$ die sogenannte **Wronski-Determinante**

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \text{ungleich Null ist.}$$

Man nennt $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ in diesem Fall ein **Fundamentalsystem** von Lösungen der homogenen linearen DGL.

Lösung linearer DGLs mit konstanten Koeffizienten

Satz (3.8)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, eine $\mathbb{C}$ -wertige $n \times n$ -Matrix.

- (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $t \mapsto e^{\lambda t} v$ ist genau dann eine Lösung des Systems $y' = Ay$ ungleich null, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.
- (ii) Ist $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ein Tupel komplexer Zahlen und $(v_1, \dots, v_r)$ ein Tupel von Vektoren, wobei v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j bezeichnet, so ist das Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ von Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig ist.
- (iii) Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die komplexen Zahlen λ_j alle verschieden sind.

Beweis von Satz 3.8 : geg. $y' = Ay$ (*)

wobei $A \in M_{n, \mathbb{C}}$

zuli) Sei $\lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \varphi(t) = e^{\lambda t} v$

Dann gilt die Äquivalenz

φ ist Lsg. von (*) $\Leftrightarrow \varphi'(t) = A \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lambda v = Av \Leftrightarrow v$ ist Eigenvektor von A zum
Eigenwert λ □