§ 6. Der Residuensatz

Definition (6.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität. Sei $r \in \mathbb{R}^+$ so klein gewählt, dass $\bar{B}_r(a) \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ gilt. Dann nennt man

$$\mathrm{res}_a(f) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das Residuum von f an der Stelle a. Ist $a \in U$ (also die Funktion f in a holomorph), dann setzt man $\mathrm{res}_a(f) = 0$.

Die Zahl $\mathrm{res}_a(f)$ ist von der Wahl des Radius r unabhängig.

Das Residuum als Laurentreihen-Koeffizient

Lemma (6.2)

Ist $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ die Laurentreihen-Entwicklung von f in einer Umgebung des Punktes a, dann gilt $a_{-1} = \mathrm{res}_a(f)$.

Lemma (6.3)

Besitzt die Funktion f bei a eine einfache Polstelle und ist g eine weitere Funktion, die in a holomorph ist, dann gilt

$$\mathrm{res}_a(fg) \quad = \quad g(a) \cdot \mathrm{res}_a(f).$$

Beweis von Lemma 6.2:

folgt aus der Gleichung für die Laurent-koeff.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \quad (\text{wobei } n \in \mathbb{Z} \text{ bel.})$$

Beweis von Lemma 6.3.

Vor.: f hat einfache Polstelle bei a

g ist in a holomorph zzg: $\operatorname{res}_a(fg) = g(a)\operatorname{res}_a(f)$

[Anwendungsbeispiel: $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = \frac{1}{z-1}$

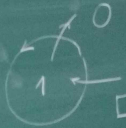
$\Rightarrow (fg)(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $\operatorname{res}_0(fg) = g(0)\operatorname{res}_0(f)$

$= (-1)\, 1 = -1$]

$= (-1)\, 1 = -1$]

Laurent- bzw. Potenzreihenentw. von f bzw. g in der Nähe von a: $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$

$$\Rightarrow (fg)(z) = \left(\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n\right) \underset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$



wobei $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l \quad \forall n \geq -1$

insb.: $c_{-1} = a_{-1} b_0 \underset{\text{Lemma 6.2}}{=} \mathrm{res}_a(f)\, g(a)$

[$c_0 = a_{-1} b_1 + a_0 b_0$, $c_1 = a_{-1} b_2 + a_0 b_1 + a_1 b_0 \dots$]

$\square$

Definition der Umlaufzahl

Definition (6.4)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ eine geschlossene Kurve und $z \in U \setminus \mathrm{sp}(\gamma)$. Dann nennt man

$$n(\gamma, z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$$

die Umlaufzahl der Kurve um den Punkt z.

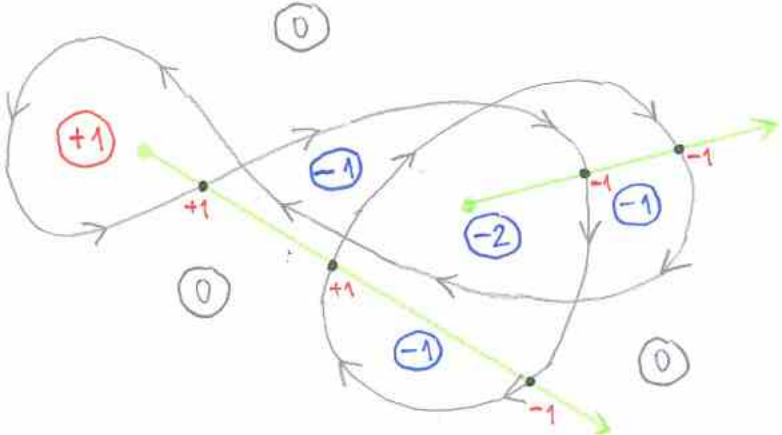
Rechenregeln für die Umlaufzahl

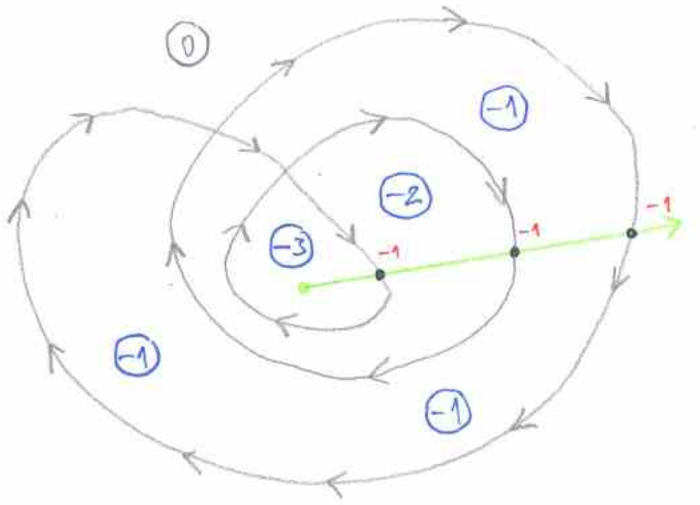
- Für Punkt $z \in \mathbb{C}$ im Außenbereich (also für hinreichend großes $|z|$) gilt $n(\gamma, z) = 0$.
- Überquert man ein nach rechts laufendes Stück der Kurve, dann ist die Umlaufzahl der Punkte hinter der Gerade um 1 höher als die Umlaufzahl der Punkte vor der Geraden.
- Überquert man dagegen eine nach links laufendes Stück, dann verringert sich die Umlaufzahl um 1.

Verfahren zur Bestimmung der Umlaufzahl $n(\gamma, z)$

- Zeichne eine Halbgerade von z aus in den Außenbereich, wobei darauf zu achten ist, dass keine Kreuzungspunkte überquert werden.
- Starte mit dem Wert 0 für die Umlaufzahl und laufe entlang der Halbgeraden nach außen.
- An jeder Überschneidung der Halbgerade mit einem nach links laufenden Kurvenstück erhöhe den Wert um 1.
- An jedem nach rechts laufenden Kurvenstück setze den Wert um 1 herab.

Dann ist der zum Schluss erreichte Wert die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$.


0
+1
-1
-2
-1
-1
0
0
+1
+1
-1
-1
-1



0
-1
-2
-3
-1
-1
-1
-1
-1
-1

Ganzahligkeit der Umlaufzahl

Proposition (6.5)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ eine geschlossene Kurve und $z \in U \setminus \gamma([a, b])$. Dann ist die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ eine ganze Zahl.

Beweis von Prop 6.5.

geg: geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen), $z \in U \setminus sp(\gamma)$

Beh: $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \in \mathbb{Z}$

O.B.d.A sei $a = 0$, $b = 1$

Def des Kurvenintegrals $\Rightarrow$

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$$

Setze $g(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt$,

$$f(x) = (\gamma(x) - z)\, e^{-g(x)}$$

$\Rightarrow n($

Es gilt $g'(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ lt. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = \gamma'(x)e^{-g(x)} + (\gamma(x)-z)(-g'(x))\cdot e^{-g(x)}$$

$$= \gamma'(x)e^{-g(x)} - (\gamma(x)-z)\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}\cdot e^{-g(x)} = 0$$

$\Rightarrow$ f ist konstant, insb. $f(0) = f(1)$

$\Rightarrow (\gamma(1)-z)\,e^{-g(1)} = f(1) = f(0) = (\gamma(0)-z)\,e^{-g(0)}$

Kurve geschlossen

$\Rightarrow \gamma(0) = \gamma(1) \Rightarrow e^{g(1)} = e^{g(0)} = e^{0} = 1$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}$ mit $g(1) = 2\pi i n$

$$\Rightarrow n(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i}\, g(1) = \frac{1}{2\pi i}\, 2\pi i\, n = n \in \mathbb{Z} \quad \square$$

Eigenschaften der Umlaufzahl

Proposition (6.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve mit $D \cap \gamma([a,b]) = \varnothing$.

(i) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq B_r(0)$.

(ii) Die Schnittmenge $D \cap B_r(0)$ ist endlich.

(iii) Für alle $z \notin B_r(0)$ gilt $n(\gamma, z) = 0$.

Insgesamt gilt $n(\gamma, z) \neq 0$ also nur für endlich viele $z \in D$.

Der Residuensatz

Satz (6.7)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $D \subseteq G$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ in G mit $\gamma([a, b]) \cap D = \varnothing$ die Gleichung

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in D} n(\gamma, z)\mathrm{res}_z(f).$$

Beweis des Residuensatzes

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in D} n(\gamma,z)\,\mathrm{res}_z(f)$$

Prop. 6 6 $\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}^+$ mit $D \subseteq B_r(0)$

$D \cap B_r(0)$ ist endlich, bestehend aus den Punkten $z_1, \dots, z_m$ Teil (iii) von Prop 6 6

$$\Rightarrow \sum_{z\in D} n(\gamma,z)\,\mathrm{res}_z(f) = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma,z_k)\,\mathrm{res}_{z_k}(f)$$

G, $B_r(0)$ sind konvex $\Rightarrow G \cap B_r(0)$ ist konvex

$\gamma([a,b]) \subseteq B_r(0) \Rightarrow$ o.B.d.A. $G = G_r = G \cap B_r(0)$

$\gamma([a,b]) = \partial B_r(0)$

$\Rightarrow$ können f als hol. Fkt. $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ betrachten

$z_1, \dots, z_m$ sind isolierte Sing. von f

Es sei $h_k : \mathbb{C} \setminus \{z_k\} \to \mathbb{C}$ der Hauptteil von f im Punkt z_k, für $1 \leq k \leq m$. $\Rightarrow g = f - \sum_{k=1}^{m} h_k$ ist von $G_r \setminus D$ auf G_r holomorph fortsetzbar.

Wende den Cauchyschen Integralsatz auf G und die Fkt. g an. $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma h_k(z)\,dz$

$= \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma h_k(z)\,dz$

Betrachte für $k \in \{1, \dots, m\}$ jeweils die Laurent-Entw.

$h_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{kn}(z-z_k)^n$ Die Reihe konvergiert auf sp(γ) gleichmäßig, da sp(γ) kompakt

⇒ Summation und Integration vertauschbar

$$\Rightarrow \int_\gamma h_k(z)\, dz =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} a_{kn} \underbrace{\int_\gamma (z-z_k)^n dz}_{\substack{=0 \text{ da komplex} \\ \text{Stammfkt. existiert}}} + a_{k,-1} \int_\gamma (z-z_k)^{-1} dz$$

$$= a_{k,-1} \int_\gamma (z-z_k)^{-1} dz$$

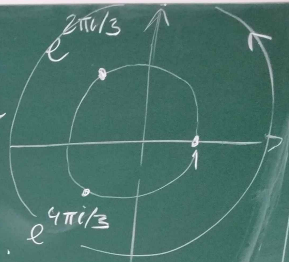
$$= a_{k,-1}\, 2\pi i\, n(\gamma, z_k)$$

$$= \operatorname{res}_{z_k}(f)\, 2\pi i\, n(\gamma, z_k) \qquad \square$$

Anw
Bere
Betrac
wobei
$z^4 + 1$
$z^4 - 1$
$z^4 - 1$
$\Rightarrow z^4$
$z_1 =$

Anwendungsbeispiel 1:

Berechnung von $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)} \frac{dw}{w^3 - 1}$



Nullstellen der Nennerfkt.:

$z_1 = 1$, $z_2 = e^{2\pi i/3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$, $z_3 = e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

Residuensatz $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_\gamma \frac{dw}{w^3 - 1} =$

$2\pi i\left(n(\gamma, z_1)\,\mathrm{res}_{z_1}(f) + n(\gamma, z_2)\,\mathrm{res}_{z_2}(f)\right.$

$\left.+\, n(\gamma, z_3)\,\mathrm{res}_{z_3}(f)\right) =$ $\qquad \gamma = \partial B_2(0)$

$2\pi i\left(\mathrm{res}_{z_1}(f) + \mathrm{res}_{z_2}(f) + \mathrm{res}_{z_3}(f)\right)$ $\qquad f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$

$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{3\pi i/4}, \quad z_3 = e^{5\pi i/4}, \quad z_4 = e^{7\pi i/4}$

Berechnung der Residuen:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)},$$

Lemma 6.3 $\Rightarrow$

$$\mathrm{res}_{z_1}(f) = \mathrm{res}_{z_1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right) \cdot \frac{1}{(z_1-z_2)} \cdot \frac{1}{(z_1-z_3)} = 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})}$$

$= \frac{1}{3}$, ebenso

$$\mathrm{res}_{z_2}(f) = \mathrm{res}_{z_2}\left(\frac{1}{z-z_2}\right) \cdot \frac{1}{(z_2-z_1)} \cdot \frac{1}{(z_2-z_3)} = \frac{1}{6}(i\sqrt{3}-1)$$

$$\mathrm{res}_{z_3}\left(\frac{1}{z-z_3}\right) = \dots = \frac{1}{6}(-i\sqrt{3}-1)$$

insg. $$\int_\gamma \frac{dw}{w^3-1} = 2\pi i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}(i\sqrt{3}-1) + \frac{1}{6}(-i\sqrt{3}-1)\right) = 0 \qquad \square$$

$\gamma = \partial B_2(0)$

$f(z) = \frac{1}{z^3-1}$

Anwendungsbeispiel 2:

Berechnung von $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

Betrachte $f: \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z^2}{z^4+1}$

wobei N Nullstellenmenge von z^4+1 in $\mathbb{C}$

$$z^4 + 1 = \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1}$$

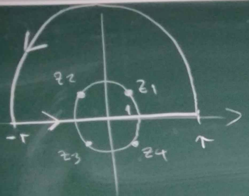
$z^8 - 1$ hat in $\mathbb{C}$ die Nullst. $e^{k\frac{\pi i}{4}}$, $0 \le k \le 7$

$z^4 - 1$ hat in $\mathbb{C}$ die Nullst. $e^{2k\frac{\pi i}{4}}$, $0 \le k \le 3$

$\Rightarrow z^4 + 1$ hat in $\mathbb{C}$ die Nullst.

$z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$, $z_4 = e^{7\pi i/4}$

$\square$



Betrachte die Kurve $r > 1$

$$\gamma_r = [-r, r] + \delta_r$$

$$\delta_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto r e^{it}$$

Residuensatz $\Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} n(\gamma_r, z_k)\, \mathrm{res}_{z_k}(f)$

$$= 2\pi i\, \mathrm{res}_{z_1}(f) + 2\pi i\, \mathrm{res}_{z_2}(f)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{res}_{z_1}(f) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathrm{res}_{z_2}(f) = \frac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

Zeige durch Abschätzung des Integranden, dass
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\delta_r} f(z)\,dz = 0.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \lim_{r\to+\infty} \int_{\delta_r} f(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz$$

$\llcorner_{\gamma_r = [-r,r] + \delta_r}$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\square$