Weglängen und Wegintegrale

Definition (5.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, $\gamma : [a, b] \to U$ ein stückweise stetig diff'barer Weg in U und $f : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann bezeichnet man

(i) die Zahl $\ell(\gamma) = \int_\gamma 1 \; ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt$ als Weglänge

(ii) den Wert $\int_\gamma f \; ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| \, dt$ als Wegintegral 1. Art

(iii) den Wert $\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle \; dt$ als Wegintegral 2. Art.

Eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$ wie in der Definition wird auch ein stetiges Vektorfeld genannt.

Geometrische Interperation der Wegintegrale 1. Art

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathscr{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$ und ist $u_k \in \,]t_{k-1}, t_k[$ für $1 \leq k \leq m$, dann folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{m} (f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \int_\gamma f \, ds \right| \quad < \quad \varepsilon.$$

Geometrische Interperation der Weglänge

Wendet man den Satz auf die konstante Funktion mit dem Wert 1 an, so erhält man folgende Ausssage über die Approximation von Kurvenlängen durch Polygonzuglängen.

Satz

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathscr{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$, dann folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \ell(\gamma) \right| \quad < \quad \varepsilon.$$

Rechenregeln für Wegintegrale

Proposition

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $F, G : U \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Außerdem seien γ_1, γ_2 stückweise stetig diff'bare Wege in U derart, dass $\gamma_1 + \gamma_2$ definiert ist. Dann gilt

(i) $\int_{\gamma_1} (\lambda f + \mu g)\, ds = \lambda \int_{\gamma_1} f\, ds + \mu \int_{\gamma_1} g\, ds$,
$\int_{\gamma_1} \langle \lambda F + \mu G, ds \rangle = \lambda \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \mu \int_{\gamma_1} \langle G, ds \rangle$

(ii) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$,
$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle$

(iii) $\int_{-\gamma_1} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds$, $\int_{-\gamma_1} \langle F, ds \rangle = -\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle$.

Gradienten und konservative Vektorfelder

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann wird das Vektorfeld $\nabla u : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$(\nabla u)(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(p) \\ \vdots \\ \partial_n u(p) \end{pmatrix}$$

der Gradient von u genannt. Ein Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ, wenn ein differenzierbare Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla u$ existiert.

Wegabhängigkeit

Im Allgemeinen sind Wegintegrale 2. Art zwischen zwei Punkten p und q abhängig vom Weg, der von p nach q gewählt wird. Ist beispielsweise $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y) \quad = \quad (x + y, y^2)$$

und sind die Wegen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ von $p = (0,0)$ nach $q = (1,1)$ gegeben durch $\gamma_1 = [(0,0),(1,0)] + [(1,0),(1,1)]$, $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t^2)$ und $\gamma_3 = [(0,0),(1,1)]$, dann erhält man

$$\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle = \tfrac{5}{6}\ , \ \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle = \tfrac{7}{6} \text{ und } \int_{\gamma_3} \langle F, ds \rangle = \tfrac{4}{3}.$$

Bei Wegintegralen 1. Art ist die Wegabhängigkeit offensichtlich.

Kriterium für die Wegunabhängigkeit

Satz (5.9)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, seien $p, q \in G$ und $F : U \to \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld. Das Wegintegral 2. Art $\int_\gamma \langle F, ds \rangle$ hat genau dann für jeden Weg γ in G von p nach q denselben Wert, wenn F konservativ ist.

Beweis von Satz (5.9)

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}^n$
stetiges Vektorfeld z.zg.:
Kurvenintegrale 2. Art über F sind wegunabh.
$\iff$ F ist konservativ

„$\Longleftarrow$" N.V. gibt es eine stetig diff'bare Fkt.
$u : G \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla u$. Seien $p, q \in G$
und $\gamma : [a,b] \to G$ ein Weg mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.
Es gilt $\langle (\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = u'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$
$\forall t \in [a,b]$, da $(\nabla u)(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(\gamma(t)) \\ \partial_n u(\gamma(t)) \end{pmatrix}$.

$$u'(\gamma(t)) = (\partial_1 u(\gamma(t)), \dots, \partial_n u(\gamma(t)))$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_a^b \langle (F\circ\gamma)(t), \gamma'(t)\rangle\, dt =$$

$$\int_a^b \langle (\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \overset{\text{s.o.}}{=} \int_a^b u'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_a^b (u\circ\gamma)'(t)\, dt = (u\circ\gamma)(b) - (u\circ\gamma)(a) = u(q) - u(p)$$

Somit hängt das Integral nur von p und q ab.

„$\Leftarrow$": Vor.: Kurvenintegrale zwischen zwei bel. Pkt. sind wegunabh. Sei $p_0 \in G$ bel. gewählt. Für jedes $p \in G$ wähle einen stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma_p : [0,1] \to G$ mit $\gamma_p(0) = p_0$, $\gamma_p(1) = p$, definiere dann eine Fkt. $u : G \to \mathbb{R}$ durch $u(p) = \int_{\gamma_p} \langle F, ds\rangle$ Bew.: $\nabla u = F$

Sei $p \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$

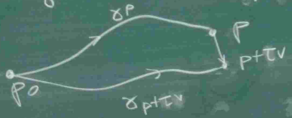
Für $\tau \in \mathbb{R}$ mit $|\tau|$ hinreichend klein gilt

$[p, p+\tau v] \subseteq G$, betrachte

$\gamma : [0,1] \to G$, $t \mapsto p + \tau t v$

Wegunabh. $\Rightarrow$

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_{p+\tau v} - \gamma_p} \langle F, ds \rangle$$



Beisp

$F(t)$

terval

$\lambda e^{\lambda t}$

$F'(t) =$

$= \frac{\partial}{\partial t} (e$

$+ i \sin(b$

$i \frac{\partial}{\partial t} (e^{a}$

$$\Rightarrow u(p+\tau v) - u(p) = \int_\gamma \langle F, ds \rangle$$

$$= \int_0^1 \langle F(p+t\tau v), \tau v \rangle \, dt =$$

$$\tau \int_0^1 \langle F(p+t\tau v), v \rangle \, dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\tau}\left(u(p+\tau v) - u(p)\right) = \int_0^1 \langle F(p+t\tau v), v \rangle \, dt$$

Betrachte nun den Grenzübergang $\tau \to 0$.

$t \mapsto \langle F(p+tv), v \rangle$ stetig auf $[0,1]$ glm. stetig. $\Rightarrow$ Für $\tau \to 0$ konvergiert die Fkt. unter dem Integralz. gleichm. gegen die konstante Fkt. $t \mapsto \langle F(p), v \rangle$ $\Rightarrow \partial_v u(p) = \langle F(p), v \rangle$

$\Rightarrow \partial_k u(p) = \langle F(p), e_k \rangle = F_k(p) \Rightarrow$ Beh. $\square$

$= \frac{\partial}{\partial t}(e$

$a e^{at} \cos$

$i a e^{at} \sin$

$= (a+ib$

$= (a+i$

$= \lambda e^{\lambda}$

Beispiele für

$\gamma : [0, 2\pi]$

(i) $f(z) = z^2$

$= \int_0^{2\pi} e^{2it}$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3i} e\right.$

Definition der komplexen Kurvenintegrale

Definition (5.10)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge, $f : U \to C$ eine stetige Funktion und $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Außerdem sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist das komplexe Kurvenintegral von f über γ definiert durch

$$\int_\gamma f\,dz \quad = \quad \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad =$$

$$\int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + i\int_a^b h(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Zur Berechnung der komplexen Kurvenintegrale

- Ist $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$, dann gilt $\int_\gamma f\, dz = F(b) - F(a)$.

- Dabei bedeutet „Stammfunktion" in diesem Zusammenhang, dass die Zerlegung $F = G + iH$ von F in Real- und Imaginärteil die Bedingung $G'(t) + iH'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ für alle $t \in [a, b]$ erfüllt.

Beispiel zur Bestimmung von Stammfkt:

$F(t) = e^{\lambda t}$ (definiert auf einem bel. Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$) ist Stammfkt. von $f(t) = \lambda e^{\lambda t}$, dann: Sei $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(a+ib)t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{at} \cdot e^{ibt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{at}\cos(bt)\right) + i \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{at}\sin(bt)\right) =$$

(ii)

$= \int_0$

$s\rangle$

$(v),v\rangle\, dt$

$\to 0$

$[0,1]$ glm.

bei Fkt. unter

konstante Fkt.

$= \langle F(p), v\rangle$

$\rangle = F_k(p) \Rightarrow$ Beh.

$\square$

$a e^{at}\cos(bt) - b e^{at}\sin(bt) +$

$i a e^{at}\sin(bt) + i b e^{at}\cos(bt)$

$= (a+ib)e^{at}\cos(bt) + i(a+ib)e^{at}\sin(bt)$

$= (a+ib)e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)$

$= \lambda e^{\lambda t}.$

Beispiele für komplexe Kurvenintegrale

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$

(i) $f(z) = z^2$ $\quad \int_\gamma z^2\, dz = \int_0^{2\pi} \gamma(t)^2 \gamma'(t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} e^{2it}\, i e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it}\, dt$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3i} e^{3it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(0-0) = 0$

(ii) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Definition der parametrisierten Flächen

Definition (5.11)

Eine parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche ist ein Paar (A, ϕ) bestehend aus einer kompakten, zusammenhängenden, Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer injektiven $\mathscr{C}^1$-Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{rg} \phi'(p) = 2$ für alle $p \in A$ gilt.

Definition der Parametertransformationen

Definition (5.12)

Seien (A, ϕ) und (B, ψ) zwei parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Flächen mit derselben Spur. Eine Parametertransformation zwischen (A, ϕ) und (B, ϕ) ist ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $\rho : A \to B$ mit $\psi \circ \rho = \phi$. Gilt det $\rho'(p) > 0$ für alle $p \in A$, dann nennt man ρ orientierungserhaltend. Ansonsten gilt $\rho'(p) < 0$ für alle $p \in A$, und man bezeichnet ρ als orientierungsumkehrend.

Parametrisierte Flächen und Untermannigfaltigkeiten

Satz (5.13)

Für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) Die Teilmenge S ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Für jeden Punkt $q \in S$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche (A, ϕ) mit $\phi(A^\circ) = S \cap U$.

Existenz von Parametertransformationen

Satz (5.14)

Zwischen zwei parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Flächen mit derselben Spur existiert entweder eine orientierungserhaltende oder eine orientierungsumkehrende Parametertransformation.

Definition der Flächenintegrale

Definition (5.15)

Sei (B, ϕ) eine parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche mit kompaktem Definitionsbereich B, $f : \phi(B) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \phi(B) \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf B. Dann wird das Integral

$$\int_{(B,\phi)} f\, dA \quad = \quad \int_B (f \circ \phi)(x, y)\, \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\|\, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 1. Art und das Integral

$$\int_{(B,\phi)} \langle F, dA \rangle \quad = \quad \int_B \langle (F \circ \phi)(x, y)\,,\, \phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) \rangle\, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 2. Art genannt. Insbesondere bezeichnet man $v_2((B, \phi)) = \int_{(B,\phi)} 1\, dA$ als Inhalt der parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Fläche.

Beispiele für parametrisierte $\mathcal{C}^1$-Flächen:

(i) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, Jordan-messbar

Dann ist $(A \times \{z\}, \phi)$ mit $\phi: A \to \mathbb{R}^3$

geg. durch $\phi(x,y) = (x,y,z)$ eine param. $\mathcal{C}^1$-Fläche

(ii) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, Jordan-messbar, $f: A \to \mathbb{R}$

stetig diffbar $\Rightarrow$ $\Gamma(f)$ ist mit der param.

$\phi: A \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ eine

param. $\mathcal{C}^1$-Fl

totale Ableitung: $\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$

(f) ist mit der param.
$\phi: A \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x, y, f(x,y))$ eine

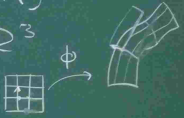
Die beiden Spaltenvektoren sind linear unabh.

$\Longrightarrow \operatorname{rg} \phi'(x,y) = 2 \quad \forall (x,y) \in A$.

<u>Def</u>: Spur von (A, ϕ) = Bildmenge $\phi(A)$

<u>Def</u>: Kreuzprodukt $v \times w$ von $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ v_1 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ w_1 \end{array} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 v_2 - v_2 v_1 \end{pmatrix}$$



<u>Bem</u>: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0$

<u>Lemma</u>: Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ lin. unabh. und $A \in M_{3,\mathbb{R}}$ die Matrix mit den Spalten u, v, w, wobei

$$u = \frac{1}{\|v \times w\|} v \times w.$$

Dann gilt

Geometrische Interpretation des Kreuzprodukts

Lemma

Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $u = \frac{1}{\|v \times w\|}(v \times w)$. Sei $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ die Matrix mit u, v und w als Spaltenvektoren. Dann gilt

$$ {}^{\mathrm{t}}AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ 0 & \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix}. $$

Bezeichnet B die rechte untere 2×2-Teilmatrix, dann gilt $\det(B) = \det({}^{\mathrm{t}}AA) = \det(A)^2$.

Geometrische Interpretation des Kreuzprodukts (Forts.)

Frage: Warum kann $\|v \times w\|$ interpretiert werden als der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms?

- Wir wissen bereits, dass für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ der Determinantenbetrag $|\det(A)|$ gleich dem Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelotops ist.
- In unserem Fall ist $|\det(A)|$ also das Volumen des von u, v und w aufgespannten Parallelotops.
- Weil $\|u\| = 1$ ist und u senkrecht auf v und w steht, ist dieses Volumen $|\det(A)|$ gleich dem Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms (multipliziert mit der „Höhe 1“ des Parallelotops).
- Sei B die Matrix von der letzten Folie. Direktes Nachrechnen zeigt, dass $\|v \times w\|^2$ mit $\det(B) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$ übereinstimmt. Also ist $\|v \times w\|^2 = \det(A)^2$ und $\|v \times w\| = |\det(A)|$.