§ 4. Der Transformationssatz

Definition (4.1)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$d_Y(f(p), f(q)) \quad \le \quad L d_X(p, q) \qquad \text{für alle} \quad p, q \in X \quad \text{erfüllt ist.}$$

Dabei bezeichnet man L als eine Lipschitz-Konstante von f. Gibt es für jeden Punkt $p \in X$ jeweils eine Umgebung U mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $f|_U$ Lipschitz-stetig ist, dann spricht man von einer lokal Lipschitz-stetigen Abbildung.

Jede Lipschitz-stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist auch gleichmäßig stetig, und damit erst recht stetig.

Globalübungsblatt: $\cancel{v_{m+n}(A+B)} = v_m(A)\, v_n(B)$

$v_{m+n}(A \times B)$

Erinnerung: $f: X \to Y$ gleichmäßig stetig $\iff$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall p, q \in X :$

$$d_X(p,q) < \delta \implies d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

Sei nun f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}_+$. Beh.: f ist glm. stetig. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

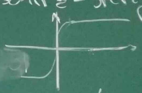
Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Seien $p, q \in X$ mit $d_X(p,q) < \delta$

$$\implies d_Y(f(p), f(q)) < L\, d_X(p,q) = L\,\delta = L\,\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Bem. Nicht jede glm. stetige Fkt. ist Lipschitz-stetig

Betrachte z.B. $f: [-1,1] \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$

Diese ist stetig, als stetige Fkt auf einem kompakten Intervall sogar glm stetig, aber nicht Lipschitz-stetig



Ang. $\exists L \in \mathbb{R}^+ : |f(p) - f(q)| < L|p-q|$ $\forall p, q \in [-1,1]$ insb.: $|f(\frac{1}{n^3}) - f(0)| < L|\frac{1}{n^3} - 0|$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < L \frac{1}{n^3} \Rightarrow n^2 < L$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ↯

Lipschitz-Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit

Satz (4.2)

Jede stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal Lipschitz-stetig.

Beweis von Satz 4.2:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar z.zg: f ist lokal L-stetig

Sei $c \in U$ und $K \subseteq U$ kompakte, konvexe Umgebung. stetige Diff'barkeit

$\Longrightarrow \exists$ konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f_k'(x)\| \leq \gamma \ \forall x \in K$ $1 \leq k \leq m$, wobei $\| \cdot \|$ Operatornorm bzgl der Max.-normen $\| \cdot \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{R}^m$

Seien $a, b \in K$. Konvexität $\to [a,b] \subseteq K$

Mittelwerts. für Richtungsabl $\Rightarrow \exists p_k \in]a,b[$

zu L

zu Satz

Frage. W

das Bild

$N \subseteq \mathbb{R}^n$

$\exists$ Nullme

$g: \mathbb{R}^2 \to$

$N = [0,1$

mit $f_k'(p_k)(v) = f_k(b) - f_k(a)$, wobei $v = b - a$

$\Rightarrow |f_k(b) - f_k(a)| = |f_k'(p_k)(v)| \leq \|f'(p_k)\| \cdot \|v\|_\infty$

$\leq \gamma \|b - a\|_\infty$, jeweils für $1 \leq k \leq m$

$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\|_\infty \leq \gamma \|b - a\|_\infty \Rightarrow f|_K$ ist Lipschitz-stetig mit L.-Konstante γ. $\square$

Bew

$N \subseteq \mathbb{R}$

L-ste

ist $\exists$

Sei L

Normen a

N $\exists$ Nul

in $\mathbb{R}^n$ m

Lemma 4

durch Wi

dann $\bigcup_{j=1}^{s}$

Überdeckungen durch Würfel

Einen kompakten Quader $Q = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als Würfel, wenn sämtliche Kantenlängen gleich sind, also $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = ... = b_n - a_n$ erfüllt ist.

Lemma (4.3)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endliche Familie $W_1, ..., W_m$ von Würfeln, die Q überdecken, mit $\sum_{s=1}^{m} v(W_s) < v(Q) + \varepsilon$.

Lipschitz-stetige Abbildungen angewendet auf Jordansche Nullmengen

Satz (4.4)

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $g : N \to \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, wobei $m \geq n$ ist. Dann ist $g(N)$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

Folgerung (4.5)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, wobei $m \geq n$ ist. Ist $N \subseteq U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, dann ist $g(N)$ eine kompakte Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

Participants Polls Chat Share Screen Record Breakout Rooms Reactions End

...tig

...-stetig

...te, kon-

...barkeit

$\|f_k'(x)\|$

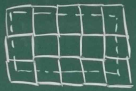
wobei

...-norm $\|\cdot\|_\infty$

... $\Rightarrow [a,b] \subseteq K$

$\Rightarrow \exists\, p_k \in \,]a,b[$

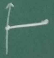
zu Lemma 4.3.



zu Satz 4.4.

Frage: Warum muss $m \geq n$ sein, damit das Bild einer Jordanschen Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ unter $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wieder eine Nullmenge ist?

Bsp. $n = 2$, $m = 1$



$\nexists$ Nullmenge

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$

$N = [0,1] \times \{0\} \Rightarrow g(N) = [0,1]$

$s - a$

$\|v\|_\infty$

ist

$\square$.

Bew von Satz 4.4:

$N \subseteq \mathbb{R}^n$ J. Nullmenge, $g: N \to \mathbb{R}^m$ L-stetig, $m \geq n$, z. zg: $g(N)$ ist J. Nullmenge

Sei L die Lipschitz-k bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Normen auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

N J. Nullmenge $\Rightarrow$ $\exists$ Quader $Q_1, \dots, Q_r$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{i=1}^{r} Q_i \supseteq N$, $\sum_{i=1}^{r} v(Q_i) < \varepsilon$.

Lemma 4.3 $\Rightarrow$ können die Quader durch Würfel $W_1, \dots, W_s$ ersetzen, so dass dann $\bigcup_{j=1}^{s} W_j \supseteq N$, $\sum_{j=1}^{s} v(W_j) < 2\varepsilon$

Ge

2^m

OBdA $W_l \cap N \neq \emptyset \quad \forall\, l \in \{1, \dots, s\}$

Sei s_l jeweils die Kantenlänge von W_l und $p_l \in W_l$ ein bel. gw. Punkt. $\Rightarrow v(W_l) = s_l^n$

und für jeden Pkt. $q \in N \cap W_l$ gilt $\|q - p_l\|_\infty \le s_l$

Lipschitz-stetigkeit $\Rightarrow \|g(q) - g(p_l)\|_\infty \le L\|q - p_l\|_\infty$
$\le L s_l \Rightarrow g(N \cap W_l)$ ist enthalten in einem Würfel der Kantenlänge $2Ls_l$ enthalten. Volumen $2^m L^m s_l^m$.

$\Rightarrow g(N)$ wird überdeckt von Würfeln mit einem Gesamtvol. $\le \sum_{l=1}^{s} 2^m L^m s_l^m = 2^m L^m \sum_{l=1}^{s} s_l^m \overset{m \ge n}{\le}$

o.B.d.A. $s_l < 1$

$2^m L^m \sum_{l=1}^{s} s_l^n \le 2^{m+1} L^m \varepsilon$

$$2^n L^n \sum_{l=1}^{s} s_l^n \le 2^{n+1} L^n \varepsilon$$

o.B.d.A. $s_l < 1$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gew. werden kann, zeigt dies, dass $g(N)$ eine J. Nullmenge ist. $\square$

Heuristische Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel $\int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt$

- An Stelle der eindimensionalen Substitutionsfunktion φ betrachten wir einen $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus φ zwischen offenen Teilmengen G und $\varphi(G)$ des $\mathbb{R}^n$.

- Aus der geometrischen Intepretation der Determinante ergibt sich

$$v(\phi(W)) \quad = \quad |\det(\phi)| v(W)$$

  für jeden linearen Endomorphismus ϕ des $\mathbb{R}^n$ und den Einheitswürfel $W = [0, 1]^n$. Es ist naheliegend, dass diese Gleichung an Stelle von W auch für beliebige Jordan-messbare Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt.

- Sei nun $D \subseteq G$ Jordan-messbar und $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall, dass D ein Quader ist. Dann gilt $\varphi(D) = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathscr{Z})} \varphi(K)$ für jede Zerlegung $\mathscr{Z}$ von D in Teilquader.

- Ist die Zerlegung $\mathscr{Z}$ hinreichend fein und a_K für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathscr{Z})$ jeweils ein beliebig gewählter Punkt, dann ist f auf $\varphi(K)$ „nahezu konstant", also gleich $(f \circ \varphi)(a_K)$.

- Daraus ergibt sich die Näherung

$$\int_{\varphi(D)} f(x)\, dx \quad = \quad \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathscr{Z})} \int_{\varphi(K)} f(x)\, dx \quad \approx$$

$$\sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathscr{Z})} (f \circ \varphi)(a_K) v(\varphi(K)).$$

- Für alle $t \in \mathbb{R}^n$ mit $a_K + t \in K$ gilt

$$\varphi(a_K + t) \approx \varphi(a_K) + \varphi'(a_K)(t)$$

auf Grund der Differenzierbarkeit von φ im Punkt a_K.

- Daraus erhalten wir für das Volumen von $\varphi(K)$ die Näherung

$$\begin{aligned} v(\varphi(K)) \;&\approx\; v(\varphi(a_K) + \varphi'(a_K)(K)) \;=\; v(\varphi'(a_K)(K)) \\ &=\; |\det \varphi'(a_K)| v(K). \end{aligned}$$

- Durch Einsetzen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(D)} f(x)\ dx\ &\approx \sum_{K\in\mathscr{Q}(\mathscr{Z})} (f\circ\varphi)(a_K))|\det\varphi'(a_K)|v(K)\\ &\approx \int_D (f\circ\varphi)(t)|\det\varphi'(t)|\ dt.\end{aligned}$$

Der Transformationssatz

Satz (4.6)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung, wobei wir voraussetzen, dass $\det \varphi'(t)$ entweder für alle $t \in G$ positiv oder für alle $t \in G$ negativ ist. Sei $T \subseteq G$ eine Jordan-messbare, kompakte Teilmenge und $f : \varphi(T) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt

(i) Die Bildmenge $\varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar.

(ii) Die Funktion f ist auf $\varphi(T)$, die Funktion $f \circ \varphi$ auf T Riemann-integrierbar.

(iii) Es gilt
$$\int_{\varphi(T)} f(x)\, dx = \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)|\, dt.$$

Zusatz: Der Transformationssatz ist auch dann noch gültig, wenn eine Jordansche Nullmenge $N \subseteq T$ existiert, auf der die Funktion $t \mapsto \det \varphi'(t)$ möglicherweise Null wird. Ebenso genügt es, dass φ auf $T \setminus N$ injektiv ist.

Spezialfälle des Transformationssatzes

(i) Setzt man $n = 1$, ist $G \subseteq \mathbb{R}$ offen und $T \subseteq G$ ein Intervall, auf dem die Ableitung von $\varphi : G \to \mathbb{R}$ nicht null wird, so erhält man aus dem Transformationssatz die Substitutionsregel aus der Analysis einer Variablen zurück.

(ii) Wendet man den Transformationssatz auf die konstante Funktion $f = 1$ an, so erhält man die Gleichung

$$v(\varphi(T)) = \int_T |\det \varphi'(t)| \, dt$$

für jede Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq G$.

(iii) Ist insbesondere φ eine bijektive lineare Abbildung, dann erhält man $v(\varphi(T)) = |\det \varphi| v(T)$.

Rückgewinnung der 1-dim. Substitutionsregel aus dem Transformationssatz

$G \subseteq \mathbb{R}$ offen, $T = [a,b]$, $\varphi : G \to \mathbb{R}$ C^1-Diffeomorphismus, $\varphi'(x) \neq 0 \ \forall x \in G$

<u>1. Fall</u>: $\varphi'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \varphi$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$

$\varphi(a) < \varphi(b)$, $\varphi(T) = [\varphi(a), \varphi(b)]$

$$\Rightarrow \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_T (f\circ\varphi)(t)\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_a^b (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

2. Fall: $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in [a,b]$

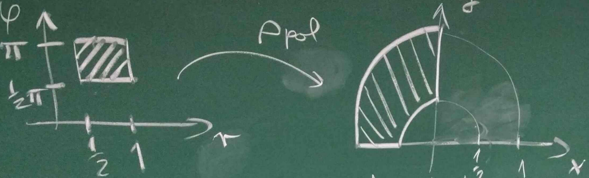
$\Rightarrow \varphi$ streng mon. fallend, $\varphi(b) < \varphi(a)$,

$\varphi([a,b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx = -\int_{\varphi(T)} f(x)\,dx$$

$$= -\int_T (f\circ\varphi)(t)\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_a^b (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

Polarkoordinaten



Flächeninhalt

$\frac{3}{16}\pi$

Polarkoord.

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

$$\varphi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det \varphi'(r, \varphi) = r$$

Bsp: $T = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$

$$v(\varphi(T)) = \int_T |\det \varphi'(t)|\, dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} r\, d\varphi \right) dr = \int_{\frac{1}{2}}^{1} r \cdot [\varphi]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} r\, dr = \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$\frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}\pi$$