Graph und Ordinatenmenge einer Funktion

Definition (3.15)

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann wird

$$\Gamma(f) \quad = \quad \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \quad \subseteq \quad A \times \mathbb{R} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^{n+1}$$

der Graph und der Funktion f genannt. Ist f nichtnegativ, also $f(x) \geq 0$ für alle $x \in A$, dann nennt man

$$\Lambda(f) \quad = \quad \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Ordinatenmenge von f.

Der Graph einer Funktion als Nullmenge

Proposition (3.16)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph $\Gamma(f)$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lemma (3.17)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmengen. Ist A eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$ oder B eine Nullmengen in $\mathbb{R}^n$, dann ist $A \times B$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.

Das Integral als Jordansches Volumen

Satz (3.18)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative, Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist die Ordinatenmenge $\Lambda(f)$ Jordan-messbar, und für ihr $(n+1)$-dimensionales Jordansches Volumen gilt

$$v_{n+1}(\Lambda(f)) \quad = \quad \int_A f(x)\, dx.$$

Bew. von Lemma (3.17)

geg. Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, o.B.d.A. A Nullmenge (Fall „B Nullmenge" analog)

o.B.d.A. sei B beschränkt (Grund: Jede Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$ ist abzählbare Vereinigung beschränkter Teilmengen, und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen)

$\Rightarrow$ Es gibt einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $Q \supseteq B$.

z.zg.: $A \times B$ ist Nullmenge. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. A Nullmenge

$\Rightarrow \exists$ Fam. $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \supseteq A$

und $\sum_{m \in \mathbb{N}} v_m(P_k) < \varepsilon \Rightarrow \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k\right) \times Q = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \times Q$

$\supseteq A \times B$. $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_{m+n}(P_k \times Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} v_m(P_k)\, v_n(Q)$

$= v(Q') \sum_{k\in\mathbb{N}} v(P_k) < \varepsilon\, v(Q)$ Da ε bel. klein gew. werden kann, folgt daraus, dass $A \times B$ Nullmenge ist $\square$

Anwendungsbeispiel zu Satz (3.18):

Die Ordinatenmenge der Funktion $f: K \to \mathbb{R}$ auf $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ geg. durch $(x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$ ist die obere Halbkugel um den Nullpunkt. Somit ist das Volumen dieser Halbkugel gleich dem Integral $\int_K f(x,y)\, d(x,y)$.

Skizze zum Beweis von Satz (3.18)

- zur Jordan-Messbarkeit von $\Lambda(f)$:

  Überprüfe die Inklusion $\partial\Lambda(f) \subseteq \bar{A} \times [0, c]$, wobei $c = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ ist.

- Überprüfe dann, dass $\partial\Lambda(f)$ in

  $$N = \Gamma(f) \cup (\partial A \cup U_A) \times [0, c] \cup A \times \{0, c\}$$

  liegt, wobei $U_A \subseteq A$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f bezeichnet.

- Zeige, dass N eine Nullmenge ist.
  ($\Rightarrow \Lambda(f)$ ist Jordan-messbar)

Skizze zum Beweis von Satz (3.18) (Forts.)

- Sei Q ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Für alle $(x, y) \in Q \times [0, c]$ gilt die Äquivalenz $\chi_{\Lambda(f)}(x, y) = 1 \Leftrightarrow y \in [0, f_Q(x)]$.

- Auf Grund dieser Äquivalenz gilt

$$v_{n+1}(\Lambda(f)) = \int_{Q\times[0,c]} \chi_{\Lambda(f)}(x,y)d(x,y) =$$

$$\int_Q \left(\int_0^c \chi_{\Lambda(f)}(x,y)dy \right) dx = \int_Q \left(\int_0^{f_Q(x)} 1 \; dy \right) dx =$$

$$\int_Q f_Q(x) \; dx = \int_A f(x) \; dx.$$

Querschnitte einer Menge

Definition (3.19)

Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq n$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Teilmenge $A(x)_j \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$A(x)_j = \{(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \mid (x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_n) \in A\}.$$

Wir bezeichnen die Mengen dieser Form als Querschnitte von A mit den affinen Unterräumen orthogonal zur x_j-Achse.

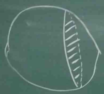
Variante:
Ist $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, dann definieren wir für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ die Teilmenge $A(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$A(x) \quad = \quad \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A\}.$$

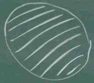
Beispiel: Querschnitte im $\mathbb{R}^3$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ jeweils

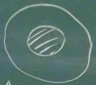
$$A(x)_1 = \{(\tilde{y}, \tilde{z}) \mid (x, \tilde{y}, \tilde{z}) \in A\}$$



$$A(y)_2 = \{(\tilde{x}, \tilde{z}) \mid (\tilde{x}, y, \tilde{z}) \in A\}$$



$A(0)_2$



$A(y)_2$ für $y \neq 0$

$$A(z)_3 = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (\tilde{x}, \tilde{y}, z) \in A\}$$

Verallgemeinerter Satz von Fubini

Satz (3.20)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge derart, dass $A(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ ebenfalls Jordan-messbar ist. Sei außerdem $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Quader mit $Q \times \mathbb{R}^n \supseteq A$. Dann ist für jedes $x \in Q$ die Funktion $f_x : A(x) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) \quad = \quad \int_Q \left(\int_{A(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Cavalierisches Prinzip

Satz (3.21)

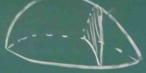
Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ so gewählt, dass für jeden Punkt $(x, y) \in A$ jeweils $a \leq x \leq b$ erfüllt ist. Außerdem setzen wir voraus, dass $A(x)_1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt

$$v_{n+1}(A) \quad = \quad \int_a^b v_n(A(x)_1)\, dx.$$

$A(z)_3 = \{(x,y) \mid (x,y,z) \in A\}$

Bsp: Anwendung des Cav. Prinzips zur Bestimmung des Volumens der Halbkugel)

$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$.



Sei $x \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $x < -1$ oder $x > 1$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ für kein $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt $\Rightarrow$ $(y,z) \notin H(x)_1$ $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $H(x)_1 = \emptyset$

2. Fall: $-1 \leq x \leq 1$. Für $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquiv. $(y,z) \in H(x)_1 \Leftrightarrow (x,y,z) \in H$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$ und $z \geq 0$

15 Polls Chat Share Screen Record Breakout Rooms Reactions End

zu 5

...ngel)

$\geq 0 \}$

$+ z^2 \leq 1$

$) \notin H(x)_1$

$\mathbb{R}^2$ gilt

$(x,y,z) \in H$

$\Longleftrightarrow \; y^2 + z^2 \leq 1 - x^2$ und $z \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ (y,z) liegt in der oberen Hälfte des Kreises vom Radius $\sqrt{1-x^2}$ um den Nullpunkt. Setze als bekannt voraus, dass dieser Halbkreis den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\pi(1-x^2)$

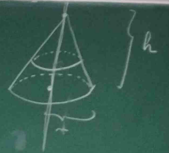
also: $V_2(H(x)_1) = \frac{1}{2}\pi(1-x^2) \quad \forall x \in [-1,1]$

Cav. Prinzip $\Longrightarrow$

$$V_3(H) = \int_{-1}^{1} V_2(H(x)_1)\,dx = \frac{1}{2}\pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\pi \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

weiteres Beispiel: Kegelvolumen



$K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le (r - \frac{zr}{h})^2, z \in [0,h]\}$

$[\, r(z) = az + b \quad r(0) = r,\ r(h) = 0$

$a\,0 + b \overset{!}{=} r,\ ah + b \overset{!}{=} 0 \Rightarrow b = r,\ ah = -r \Rightarrow a = -\frac{r}{h}$

$\Rightarrow r(z) = -\frac{r}{h} z + r \,]$

Bestimme die Querschnitte von K entlang der z-Achse

Ist $z \notin [0,h]$, dann gilt $(x,y,z) \notin K \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow K(z)_3 = \emptyset$ für $z \notin [0,h]$

ansonsten: $(x,y) \in K(z)_3 \Leftrightarrow (x,y,z) \in K \Leftrightarrow$

$x^2+y^2 \le (r - \frac{zr}{h})^2 \Leftrightarrow (x,y)$ liegt im Vollkreis von

$r(z) = -\frac{r}{h} z + r$)

Bestimme die Querschnitte von K entlang der z-Achse

Radius $r - \frac{zr}{h} = r\left(1 - \frac{z}{h}\right)$

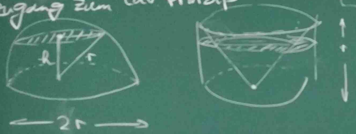
also: $V_2\left(K(z)_3\right) = \pi r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \quad \forall z \in [0,h]$

$\Rightarrow V_3(K) = \int_0^h V_2(K(z))_3 \, dz = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{1}{h} z\right)^2 dz$

$= \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{2}{h} z + \frac{z^2}{h^2}\right) dz = \pi r^2 \left[z - \frac{1}{h} z^2 + \frac{1}{3} \frac{z^3}{h^2} \right]_0^h$

$= \pi r^2 \left(\cancel{h} - \cancel{h} + \frac{1}{3} h\right) = \frac{1}{3} \underbrace{\pi r^2}_{\text{Grundfläche}} h$

historischer Zugang zum Cav Prinzip



links: Betrachte den Schnitt der Kugel mit der Ebene $z = h$. für $0 \leq h \leq r$ erhalte einen Kreis vom Radius $\sqrt{r^2 - h^2}$

Flächeninhalt $\pi(r^2 - h^2)$

rechts: Betrachte den Schnitt von $Z \setminus K$ (Z = Zylinder, K = Kegel) mit der Ebene $z = h$. Schnitt mit Zylinder = Kreis vom Radius r, Flächeninhalt πr^2

Schnitt mit dem Kegel = Kreis vom Radius h, Flächeninhalt πh^2 $\Rightarrow$ Der Schnitt von $H \setminus K$ mit $z = h$ ist ein Kreisring mit Flächeninh. $\pi(r^2 - h^2)$

Cavalieri: Somit müssen die Volumina von H und $Z \setminus K$ gleich sein

$$\Rightarrow V_3(H) = V_3(Z) - V_3(K) = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Definition der Normalbereiche

Definition (3.22)

Sei $j \in \{1, ..., n\}$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird Normalbereich bezüglich der x_j-Achse genannt, wenn eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq \psi$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \ \leq \\ & x_j \ \leq \ \psi(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)\} \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Formulierung des Satzes von Fubini für Normalbereiche

Folgerung (3.23)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich bezüglich der x_j-Achse, und seien $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ wie oben definiert. Dann gilt für jede stetige und beschränkte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ jeweils

$$\int_A f(x)\, dx \quad =$$

$$\int_B \left(\int_{\varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)}^{\psi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_j \right) d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$