§ 1. Das mehrdimensionale Riemann-Integral

- Ein (achsenparalleler, kompakter) Quader im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n$$

mit $I_k = [a_k, b_k]$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ für $1 \le k \le n$.

- Die Zahl $v(Q) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ bezeichnen wir als das (n-dimensionale) Volumen von Q.

Zerlegungen von Quadern

Definition (1.1)

Sei $Q = I_1 \times ... \times I_n$ ein Quader im $\mathbb{R}^n$.

(i) Eine Zerlegung von Q ist ein Tupel $\mathscr{Z} = (\mathscr{Z}_1, ..., \mathscr{Z}_n)$, wobei $\mathscr{Z}_k$ für $1 \le k \le n$ jeweils eine Zerlegung des Intervalls I_k bezeichnet.

(ii) Ist $\mathscr{Z}$ eine solche Zerlegung, $I_k = [a_k, b_k]$ und $\mathscr{Z}_k = \{x_{k,1}, ..., x_{k,m_k-1}\}$ für $1 \le k \le n$ mit jeweils $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < ... < x_{k,m_k-1} < x_{k,m_k} = b_k$, dann bezeichnen wir eine Teilmenge $K \subseteq Q$ der Form

$$K \quad = \quad [x_{1,\ell_1-1}, x_{1,\ell_1}] \times ... \times [x_{n,\ell_n-1}, x_{n,\ell_n}]$$

mit $1 \le \ell_k \le m_k$ für $1 \le k \le n$ als Teilquader von Q bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$. Die Menge all dieser Teilquader bezeichnen wir mit $\mathscr{Q}(\mathscr{Z})$.

Zerlegungen von Quadern (Forts.)

Definition (12.1)

(iii) Ist $\mathscr{Z}' = (\mathscr{Z}'_1, ..., \mathscr{Z}'_n)$ eine weitere Zerlegung von Q, so bezeichnen wir $\mathscr{Z}'$ als Verfeinerung von $\mathscr{Z}$, wenn $\mathscr{Z}'_k \supseteq \mathscr{Z}_k$ für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

Je zwei Zerlegungen $\mathscr{Z}$ und $\mathscr{Z}'$ kann eine gemeinsame Verfeinerung zugeordnet werden, nämlich die Verfeinerung mit den Komponenten $\mathscr{Z}_k \cup \mathscr{Z}'_k$, die wir der Einfachheit halber mit $\mathscr{Z} \cup \mathscr{Z}'$ bezeichnen.

Definition von Unter- und Obersummen

Definition (1.4)

Für jede Zerlegung $\mathscr{Z}$ von Q wie angegeben bezeichnet man die Werte

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) = \sum_{K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})} c_{K,f}^- v(K) \quad \text{bzw.} \quad \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) = \sum_{K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})} c_{K,f}^+ v(K)$$

als Unter- bzw. Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$.

Verhalten von Unter- und Obersummen unter Verfeinerungen

Lemma (1.5)

Sind $\mathscr{Z}, \mathscr{Z}'$ Zerlegungen von Q, und ist $\mathscr{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{Z}$, dann gilt

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \quad \leq \quad \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}') \qquad \text{und} \qquad \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}') \quad \leq \quad \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}).$$

Definition der Riemann-integrierbaren Funktionen

Definition (1.7)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann nennt man

$$\int_{Q\star} f(x)\, dx = \sup_{\mathscr{Z}} \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \quad \text{bzw.} \quad \int_Q^{\star} f(x)\, dx = \inf_{\mathscr{Z}} \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z})$$

das Unter- bzw. Oberintegral von f, wobei $\mathscr{Z}$ bei der Bildung von Supremum und Infimum jeweils alle Zerlegungen des Quaders Q durchläuft. Man bezeichnet f als Riemann-integrierbar, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall nennt man

$$\int_Q f(x)\, dx \quad = \quad \int_{Q\star} f(x)\, dx \qquad \text{Riemann-Integral} \quad \text{von } f.$$

Notwendiges und hinreichendes Kriterium für Integrierbarkeit

Proposition (1.8)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ von Q gibt mit

$$\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) - \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \quad < \quad \varepsilon.$$

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der integrierbaren Funktionen

Proposition (1.9)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch f und g Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q (f+g)(x)\, dx \quad = \quad \int_Q f(x)\, dx + \int_Q g(x)\, dx$$

und

$$\int_Q (\lambda f)(x)\, dx \quad = \quad \lambda \int_Q f(x)\, dx.$$

Aus $f \le g$ folgt $\int_Q f(x)\, dx \le \int_Q g(x)\, dx$.

Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Proposition (1.10)

Jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q ist Riemann-integrierbar.

Satz (1.11)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, und sei $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Quader $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in P$ sei die Funktion $f_x : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_x(y) = f(x, y)$. Dann sind die Funktionen

$$f_\bigstar : P \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \int_{Q\bigstar} f_x(y)\; dy$$

und

$$f^\bigstar : P \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \int_Q^\bigstar f_x(y)\; dy$$

beide Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_P \left(\int_{Q\bigstar} f_x(y)\; dy \right)\; dx = \int_P \left(\int_Q^\bigstar f_x(y)\; dy \right)\; dx.$$

Ist f stetig, dann gilt einfach

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P \left(\int_Q f_x(y)\ dy \right)\ dx = \int_P \left(\int_Q f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

§ 2. Nullmengen und Lebesguesches Integrabilitätskriterium

Definition (2.1)

- Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine abzählbare Familie $(K_i)_{i \in I}$ von offenen Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i$ und $\sum_{i \in I} v(K_i) < \varepsilon$ existiert.

- Findet man für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sogar eine endliche Familie von offenen Quadern mit diesen Eigenschaften, dann sprechen wir von einer Jordanschen Nullmenge.

Eigenschaften von Nullmengen

Proposition (2.2)

(i) Gilt $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist B eine Nullmenge, dann ist auch A eine Nullmenge. Ist B sogar eine Jordansche Nullmenge, dann ist auch A eine Jordansche Nullmenge.

(ii) Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge, und jede endliche Menge ist eine Jordansche Nullmenge.

(iii) Endliche Vereinigungen von Jordanschen Nullmengen sind Jordansche Nullmengen. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

(iv) Eine kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie eine Jordansche Nullmenge ist.

Das Lebesguesche Integrierbarkeitskriterium

Satz (2.6)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U \subseteq Q$ die Teilmenge der Punkte, in denen f unstetig ist. Dann sind äquivalent

(i) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.

(ii) Die Menge U ist eine Nullmenge.

§ 3. Integration über Jordan-messbare Mengen

Definition (3.1)

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird Jordan-messbar genannt, wenn sie beschränkt und die charakteristische Funktion von A gegeben durch

$$\chi_A : Q \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

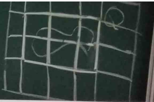
Riemann-integrierbar ist. Dabei bezeichnet Q einen beliebigen kompakten Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Das Integral $v(A) = \int_Q \chi_A(x)\, dx$ wird in diesem Fall das Jordan-Volumen von A genannt.

Wohldefiniertheit des Jordan-Volumens

Proposition (3.2)

Sowohl die Definition der Jordan-Messbarkeit als auch das Jordan-Volumen sind unabhängig von der Wahl des Quaders Q.

Annahme gibt es eine Zerlegung Z von Q mit
$S^+_\chi(Z) - S^-_\chi(Z) < \varepsilon$. Wähle eine



Beweis von Prop. (3.2)

geg. $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q, Q' \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Quader mit
$Q^\circ \supseteq A$, $(Q')^\circ \supseteq A$

$$\chi : Q \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in Q \setminus A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

$$\chi' : Q' \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in Q' \setminus A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

z.zg. (i) χ Riemann-integrierbar $\iff$ χ' R-int.

(ii) Ist dies der Fall, dann gilt $\int_Q \chi(x)\,dx = \int_{Q'} \chi'(x)\,dx$

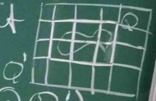
Reduziere den Beweis auf den Fall $Q' \supseteq Q$.
Seien Q, Q' beliebig und Q'' ein weiterer Quader
mit $Q'' \supseteq Q$, $Q'' \supseteq Q'$. Definiere

$$\chi'': Q'' \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in Q'' \setminus A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

Laut Annahme gilt χ R.-int $\Leftrightarrow \chi''$ R-int. $\Leftrightarrow$ χ' R.-int., außerdem $\int_Q \chi(x)\,dx = \int_{Q''} \chi''(x)\,dx = \int_{Q'} \chi'(x)\,dx$

Setze nun $Q' \supseteq Q$ voraus

Annahme: $\chi: Q \to \mathbb{R}$ ist R-int. z.zg: $\chi': Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-int. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vor. Auf Grund der Annahme gibt es eine Zerlegung Z von Q mit $S^+_\chi(Z) - S^-_\chi(Z) < \varepsilon$. Wähle eine Zerlegung Z' von Q' so, dass $Q(Z) \subseteq Q(Z')$



Sei $K \in Q(Z')$. <u>1. Fall</u>: $K \notin Q(Z)$

Dann gilt $K \cap Q^\circ = \emptyset$, erst recht $K \cap A = \emptyset$, also
$\chi'|_K = 0$ 2. Fall: $K \in Q(Z)$ Dann gilt $\chi'|_K = \chi|_K$.
$\Rightarrow$ Es gilt $c^+_{K,\chi'} = 0$ falls $K \notin Q(Z)$ und $c^+_{K,\chi'} = c^+_{K,\chi}$
falls $K \in Q(Z)$ $\Rightarrow S^+_{\chi'}(Z') = \sum_{K \in Q(Z')} c^+_{K,\chi'} v(K) = \sum_{K \in Q(Z') \setminus Q(Z)} c^+_{K,\chi'} v(K) +$
$\sum_{K \in Q(Z)} c^+_{K,\chi'} v(K) = 0 + \sum_{K \in Q(Z)} c^+_{K,\chi} v(K) = S^+_{\chi}(Z)$ genauso:
$S^-_{\chi'}(Z') = S^-_{\chi}(Z) \Rightarrow S^+_{\chi'}(Z') - S^-_{\chi'}(Z') = S^+_{\chi}(Z) - S^-_{\chi}(Z) < \varepsilon$
$\Rightarrow \chi'$ ist Riemann-int. Der Beweis der umgekehrten Implikation läuft analog
noch zzg.: $\int_Q \chi(x)\,dx = \int_Q \chi'(x)\,dx$ Sei Z eine Zerlegung von Q und
Z' definiert wie oben. $\Rightarrow S^-_{\chi}(Z) = S^-_{\chi'}(Z') \le \int_Q \chi(x)\,dx$. $\int_Q \chi'(x)\,dx \le$

... χ ist Riemann- ...

... zzg. $\int_Q \chi(x)\,dx = \int_{Q'} \chi'(x)\,dx$ ... Sei Z ... $\chi(x)\,dx$ ... $\int_{Q'} \chi'(x)\,dx \leq$

... definiert wie oben. $\Longrightarrow S^-_\chi(Z) = S^-_{\chi'}(Z') \leq$ ...

$S^+_\chi(Z) = S^+_{\chi'}(Z')$ Wählen wir Z so, dass $S^+_\chi(Z) - S^-_\chi(Z) < \varepsilon$,

für bel. vorgeg. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, dann folgt $\left| \int_{Q'} \chi'(x)\,dx - \int_Q \chi(x)\,dx \right| < \varepsilon$

Da ε bel. klein gewählt werden kann, folgt $\int_Q \chi(x)\,dx = \int_{Q'} \chi'(x)\,dx$. $\square$

Inneres und äußeres Volumen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge.

- innere Volumen von A

$$v^-(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{p} v(K_i) \;\middle|\; K_1, \ldots, K_p \text{ disjunkte kompakte Quader mit } \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subseteq A\right\}$$

- äußeres Volumen von A

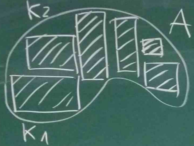
$$v^+(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{p} v(K_i) \;\middle|\; K_1, \ldots, K_p \text{ kompakte Quader mit } \bigcup_{i=1}^{n} K_i \supseteq A\right\}$$

Proposition (3.3)

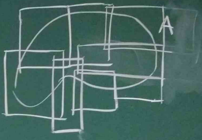
Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn inneres und äußeres Volumen übereinstimmen, und dann gilt $v(A) = v_-(A) = v^+(A)$.

1. Fall: $x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es

zur Def. des inneren Volumens.



äußeres Volumen:



Kriterium für die Jordan-Messbarkeit

Proposition (3.4)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, Q ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A$ und χ_A die zugehörige charakteristische Funktion. Dann sind die Randpunkte von A genau die Unstetigkeitsstellen von χ_A.

Folgerung (3.5)

Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ∂A eine Nullmenge ist.

Beweis von Prop. (3.4):

geg.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Q Quader im $\mathbb{R}^n$ mit $Q^\circ \supseteq A$

Sei $x \in Q$. z.zg.: $x \in \partial A \Leftrightarrow \chi_A$ unstetig in x

„$\Rightarrow$": Vor. $x \in \partial A$. Ang. χ_A ist stetig in x. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_A(x_n) = \chi_A(x)$

<u>1. Fall</u>: $x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es aber wegen $x \in \partial A$ ein $x_n \in B_{1/n}(x)$ mit $x_n \notin A$. Es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_A(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \neq \chi_A(x)$ ↯

<u>2. Fall</u>: analog

„$\Leftarrow$": Ang. $x \notin \partial A$. Dann gibt es offene Umg. U von x mit $U \subseteq A$ oder $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

„$\Leftarrow$" Ang. $x \notin \partial A$. Dann gibt es offene Umg. U von x mit

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_A(x_n) = \chi_A(x)$.

1. Fall: $U \subseteq A \Rightarrow x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1$

U offene Umg. von x, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: x_n \in U$

für alle $n \geq N \Rightarrow \chi_A(x_n) = 1 \;\forall n \geq N$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \chi_A(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 = \chi_A(x)$

2. Fall: $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ analog.