Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Lösung Blatt 13** —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Eine lineare DGL erster Ordnung hat laut Vorlesung der Form $y' = f(x)y + g(x)$, wobei f, g stetige Funktionen auf einem Intervall I bezeichnen. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann bezeichnet man die DGL als homogen, ansonsten als inhomogen.

zu (b) Jede Lösung einer linearen DGL hat ganz I als Definitionsbereich, d.h. der Definitionsbereich stimmt mit dem Definitionsbereich der DGL überein. Ist die DGL homogen, dann bilden die Lösungen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum; jede Summe von zwei Lösungen und jedes skalare Vielfache einer Lösung ist also wiederum eine Lösung. Ist die DGL inhomogen und ist ψ_0 eine spezielle Lösung, dann hat jede Lösung die Form $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ die Lösungen der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durchläuft.

zu (c) Gesucht wird eine Lösung ψ der inhomogenen linearen DGL mit $\psi(a) = b$, wobei $a \in I$ und $b \in \mathbb{R}$ ist. Zunächst berechnet man mit dem Ansatz $\varphi(x) = e^{F(x)}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Lösung der homogenen linearen DGL. Anschließend berechnet man die Funktion $u(x) = b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt$. Es ist dann $\psi = u\varphi$ eine Lösung mit der angegebenen Eigenschaft.

zu (d) Es gilt $\cosh'(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \sinh(t)$ und $\sinh'(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t)$. Daraus folgt $\cosh''(t) = \cosh(t)$ und $\sinh''(t) = \sinh(t)$, die beiden Funktionen sind also Lösungen der DGL. Nun ist laut Vorlesung ein Tupel von Funktionen genau dann ein Fundamentalsystem von Lösungen, wenn die Wronski-Determinante gebildet mit den höheren Ableitungen an einer beliebigen Stelle des Definitionsbereichs ungleich Null ist. Nun gilt

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} \cosh(0) & \sinh(0) \\ \cosh'(0) & \sinh'(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cosh(0) & \sinh(0) \\ \sinh(0) & \cosh(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Das Kriterium ist also erfüllt.

Aufgabe 1

zu (a) Gegeben ist die inhomogene lineare DGL $y' = f(x)y + g(x)$ mit den Funktionen $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ und $g(x) = -\sqrt{x^2-1}$. Dem Lösungsschema aus der Vorlesung folgend, berechnen wir für vorgegebenes $(a,b) \in D$ zunächst eine Lösung φ des homogenen Systems mit $\varphi(a) = 1$ durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^x \frac{2t}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{a^2-1}^{x^2-1} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - c_a \quad , \quad c_a = \frac{1}{2}\ln(a^2-1)$$

$$\varphi(x) = e^{F(x)} = e^{-c_a} e^{\frac{1}{2}\ln(x^2-1)} = e^{-c_a}\sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Nun wenden wir die Variation der Konstanten an.

$$u(x) = b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt = b - \int_a^x \frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}}\sqrt{a^2-1}\,dt = b - \sqrt{a^2-1}(x-a)$$

$$\psi(x) = \varphi(x)u(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{a^2-1}}(b - \sqrt{a^2-1}(x-a)) = \sqrt{x^2-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-1}} - x + a\right)$$

zu (b) Diesmal sind die Funktionen in der DGL $y' = f(x)y + g(x)$ gegeben durch $f(x) = -2$ und $g(x) = 3e^{5x} + x - 1$. Für vorgegebenes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = (-2)[t]_a^x = 2(a-x)$, also ist

$\varphi(x) = e^{F(x)} = e^{2a-2x}$ eine Lösung des homogenen Systems mit $\varphi(a) = 1$. Die Variation der Konstanten liefert

$$u(x) \quad = \quad b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\, dt \quad = \quad b + \int_a^x (3e^{5t} + t - 1)e^{2t-2a}\, dt \quad = \quad b + e^{-2a} \int_a^x (3e^{5t} + t - 1)e^{2t}\, dt \quad =$$

$$b + 3e^{-2a} \int_a^x e^{7t}\, dt + e^{-2a} \int_a^x (t-1)e^{2t}\, dt.$$

Es ist $\int_a^x e^{7t}\, dt = [\frac{1}{7}e^{7t}]_a^x$, und partielle Integration liefert

$$\int_a^x (t-1)e^{2t}\, dt \quad = \quad \left[\tfrac{1}{2}(t-1)e^{2t}\right]_a^x - \int_a^x \tfrac{1}{2}e^{2t}\, dt \quad = \quad \left[\tfrac{1}{2}(t-1)e^{2t} - \tfrac{1}{4}e^{2t}\right]_a^x \quad =$$

$$\tfrac{1}{4}\left[(2t-2-1)e^{2t}\right]_a^x \quad = \quad \tfrac{1}{4}\left[(2t-3)e^{2t}\right]_a^x.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$u(x) \quad = \quad b + e^{-2a}\left[\tfrac{3}{7}e^{7t} + \tfrac{1}{4}(2t-3)e^{2t}\right]_a^x \quad = \quad b + e^{-2a}(\tfrac{3}{7}e^{7x} + \tfrac{1}{4}(2x-3)e^{2x} - c_a)$$

mit der Konstanten $c_a = \frac{3}{7}e^{7a} + \frac{1}{4}(2a-3)e^{2a}$, und schließlich die Lösungsfunktion

$$\psi(x) \quad = \quad \varphi(x)u(x) \quad = \quad be^{2a-2x} + e^{-2a}\left(\tfrac{3}{7}e^{7x} + \tfrac{1}{4}(2x-3)e^{2x} - c_a\right)e^{2a-2x} \quad =$$

$$be^{2a-2x} + \left(\tfrac{3}{7}e^{7x} + \tfrac{1}{4}(2x-3)e^{2x} - c_a\right)e^{-2x}.$$

Aufgabe 2

zu (a) Durch Ausprobieren findet man für p die Nullstellen 1 und 2, und durch Polynomdivision erhält man die Zerlegung $p = (x-1)(x-2)(x^2+3)$. Die Nullstellen von p sind also 1, 2 und $\pm i\sqrt{3}$.

zu (b) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\varphi'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\varphi''_\lambda(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $\varphi'''_\lambda(t) = \lambda^3 e^{\lambda t}$ und $\varphi^{(4)}_\lambda = \lambda^4 e^{\lambda t}$. Es gilt somit die Äquivalenz

$$\varphi_\lambda \text{ ist Lösung der DGL} \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} : \varphi_\lambda(4)(t) = -6\varphi_\lambda(t) + 9\varphi'_\lambda(t) - 5\varphi''_\lambda(t) + 3\varphi'''_\lambda(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} : \lambda^4 e^{\lambda t} = -6e^{\lambda t} + 9\lambda e^{\lambda t} - 5\lambda^2 e^{\lambda t} + 3\lambda^3 e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} : (\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 6)e^{\lambda t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} : p(\lambda)e^{\lambda t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\lambda) = 0.$$

zu (c) Auf Grund der Eulerschen Gleichung $e^{u+iv} = e^u(\cos(v) + i\sin(v))$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils

$$\tfrac{1}{2}\varphi_\lambda(t) + \tfrac{1}{2}\varphi_{\bar\lambda}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}e^{(u+iv)t} + \tfrac{1}{2}e^{(u-iv)t}$$

$$= \quad \tfrac{1}{2}e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt)) + \tfrac{1}{2}e^{ut}(\cos(vt) - i\sin(vt)) \quad = \quad e^{ut}\cos(vt)$$

und

$$\tfrac{1}{2i}\varphi_\lambda(t) - \tfrac{1}{2i}\varphi_{\bar\lambda}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2i}e^{(u+iv)t} - \tfrac{1}{2i}e^{(u-iv)t}$$

$$= \quad \tfrac{1}{2i}e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt)) - \tfrac{1}{2i}e^{ut}(\cos(vt) - i\sin(vt)) \quad = \quad \tfrac{1}{2i}e^{ut}2i\sin(vt) \quad = \quad e^{ut}\sin(vt).$$

Die angegebene DGL vierter Ordnung ist eine *lineare* DGL, deshalb ist jede komplexe Linearkombination von Lösungen wiederum eine Lösung. Mit φ_λ und $\varphi_{\bar\lambda}$ sind also auch durch $\frac{1}{2}\varphi_\lambda(t) + \frac{1}{2}\varphi_{\bar\lambda}(t) = e^{ut}\cos(vt)$ und $\frac{1}{2i}\varphi_\lambda(t) - \frac{1}{2i}\varphi_{\bar\lambda}(t) = e^{ut}\sin(vt)$ Lösungen gegeben. Sind umgekehrt $\psi_\lambda(t) = e^{ut}\cos(vt)$, $\psi_{\bar\lambda}(t) = e^{ut}\sin(vt)$ Lösungen der DGL, so sind auch $(\psi_\lambda + i\psi_{\bar\lambda})(t) = e^{ut}\cos(vt) + ie^{ut}(v) = e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt)) = e^{(u+iv)t}$ und $(\psi_\lambda - i\psi_{\bar\lambda})(t) = e^{ut}\cos(vt) - ie^{ut}(v) = e^{ut}(\cos(vt) - i\sin(vt)) = e^{(u-iv)t}$ Lösungen.

zu (d) Die bisherigen Aufgabenteile zeigen, dass durch $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = e^{2t}$, $\varphi_3(t) = \cos(\sqrt{3}t)$, $\varphi_4(t) = \sin(\sqrt{3}t)$ Lösungen der DGL gegeben sind. Die Ableitungen der Lösungsfunktionen sind gegeben durch

$$\psi_1'(x) = \psi_1''(x) = \psi_1'''(x) = e^x$$
$$\psi_2'(x) = 2e^{2x} \quad , \quad \psi_2''(x) = 4e^{2x} \quad , \quad \psi_2'''(x) = 8e^{2x}$$
$$\psi_3'(x) = -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) \quad , \quad \psi_3''(x) = -3\cos(\sqrt{3}x) \quad , \quad \psi_3'''(x) = 3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$$
$$\psi_4'(x) = \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) \quad , \quad \psi_4''(x) = -3\sin(\sqrt{3}x) \quad , \quad \psi_4'''(x) = -3\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x).$$

Wir erhalten damit die Wronski-Determinante

$$W(0) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \varphi_3'(0) & \varphi_4'(0) \\ \varphi_1''(0) & \varphi_2''(0) & \varphi_3''(0) & \varphi_4''(0) \\ \varphi_1'''(0) & \varphi_2'''(0) & \varphi_3'''(0) & \varphi_4'''(0) \end{pmatrix} \quad = \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & -3\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad = \quad 28\sqrt{3}.$$

Wegen $W(0) \neq 0$ ist $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ also ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen.