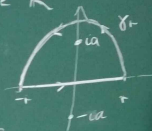


Lösung Globalübungsblatt 12

Aufgabe 1 z.zg: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a e^a} \quad (a \in \mathbb{R}^+)$

Hinweis: $\operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} \right) = \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$



Singularitäten von f = Nullstellen von $z^2 + a^2$

Dies sind die Punkte $\pm ia$

Betrachte für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ den Integrationsweg

Dies sind die Punkte $\pm ia$

Betrachte γ_r in $\mathbb{R}^+$ in der Ebene

$$\gamma_r = [-r, r] + \delta_r, \delta_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$$

Residuensatz $\Rightarrow$ Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ mit $r \neq a$ gilt

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i (n(\gamma_r, ia) \operatorname{res}_{ia}(f) + n(\gamma_r, -ia) \operatorname{res}_{-ia}(f))$$

Für $a > r$ gilt $n(\gamma_r, ia) = 1$, $n(\gamma_r, -ia) = 0$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{ia}(f)$$

Berechnung des Residuums: ia einfache Polstelle von f

$$f(z) = \frac{1}{z-ia} \frac{e^{iz}}{z+ia} \Rightarrow \operatorname{res}_{ia}(f) = \frac{e^{i(ia)}}{ia+ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Untersuchung des Kurvenintegrals:

$$\Rightarrow \text{gilt } \int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{-r}^r f(z) dz + \int_{\delta_r} f(z) dz$$

Abschätzung des Integrals $\int_{\delta_r} f(z) dz$.

Für alle $z \in \delta_r$ gilt $|z| = r$

$$\text{und somit } |z^2 + a^2| = |z^2 - (-a^2)| \geq$$

$$||z|^2 - a^2| = |r^2 - a^2| \geq \frac{1}{2} r^2 \text{ für}$$

hinreichend großes r (genauer: Für alle

$r \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{2} r^2 \geq a^2$) Für diese r

und $t \in [0, \pi]$ gilt dann $|f(\delta_r(t))|$

$$= |f(e^{it})| = \left| \frac{e^{i e^{it}}}{(e^{it})^2 + a^2} \right| \leq$$

$$\frac{2}{r^2} |e^{i e^{it}}| = \frac{2}{r^2} |e^{i(\cos(t) + i \sin(t))}|$$

$$= \frac{2}{r^2} |e^{i \cos(t) - \sin(t)}| = \frac{2}{r^2} e^{-\sin(t)} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\leq \frac{2}{r^2} \Rightarrow \left| \int_{\delta_r} f(z) dz \right| \leq l(\delta_r) \frac{2}{r^2}$$

$$= \pi r \cdot \frac{2}{r^2} = \frac{2\pi}{r} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\delta_r} f(z) dz = 0$$

einsetzen $\rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx$$

$$= \lim_{r \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left(\int_{-r}^r \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz \right) =$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left(\int_{-r}^r f(z) dz + \int_{\delta_r} f(z) dz \right) =$$

$$\operatorname{Re} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\delta_r} f(z) dz \right) =$$

An

Se

(i)

(ii)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{res}_a(f) \right) &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia} \right) = \\ &= 0 \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\pi}{ae^a} \right) = \frac{\pi}{ae^a} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Satz 2.3 (Substitution)

(i) $y' = f(ax + by + c) \quad (*)$

Bestimme eine Lsg. φ von $y' = a + b f(y)$
 $\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{b} \psi(x) - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ist Lsg. von $(*)$

(ii) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (**)$

Bestimme eine Lsg. φ von $y' = \frac{1}{x} (f(y) - y)$

Dann ist $\varphi(x) = x \cdot \psi(x)$ Lösung von $(*)_2$.

(iii) $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$, $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \stackrel{(\Delta)}{\neq} 0$ $(*)_3$

Bestimme die (wg. (Δ) eindeutige) Lösung des LGS

$$\alpha x + \beta y + c = \alpha x + \beta y + \gamma = 0 =: (x_0, y_0)$$

Bestimme eine Lsg. ψ von $y' = f\left(\frac{\alpha + \beta \frac{y}{x}}{\alpha + \beta \frac{y}{x}}\right)$

Dann ist $\varphi(x) = \psi(x - x_0) + y_0$ Lsg. von $(*)_3$.

Bestimme nur eine Lsg. der angeg. DGL.

zu (a) $y' = \frac{y+1}{x+2} + \exp\left(\frac{y+1}{x+2}\right) = f\left(\frac{y+1}{x+2}\right)$ mit $f(y) = y + e^y$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{(iii) ist anwendbar}$$

und best. Lsg. von $x+2 = y+1 = 0$ ist $(x_0, y_0) = (-2, -1)$

$$\Rightarrow \text{benötige Lsg von } y' = f\left(\frac{yx}{1}\right) = \frac{yx}{x} + e^{y/x} \quad (*5)$$

$$\begin{aligned} \text{Regel (ii)} &\Rightarrow \text{benötige Lsg von } y' = \frac{1}{x}(f(y) - y) \\ &= \frac{1}{x}(y + e^y - y) = \frac{1}{x} e^y \quad (*4) \end{aligned}$$

Löse diese DGL durch Trennung der Variablen

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$$

$$G(y) = \int_0^y e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^y = 1 - e^{-y}$$

$$\begin{aligned} \text{Umkehrfkt: } x &= 1 - e^{-y} \Leftrightarrow e^{-y} = 1 - x \Leftrightarrow -y = \ln(1 - x) \\ &\Leftrightarrow y = -\ln(1 - \ln(x)) =: H(x) \end{aligned}$$

$$\underline{\text{also}} \quad \alpha(x) = (H \circ F)(x) = -\ln(1 - \ln(x)) \quad \text{ist}$$

Lösung von $(*4)$

(iii) $\Psi(x) = -x \ln(1 - \ln(x))$ löst (*)

(iii) $\Psi(x) = \Psi(x+2) - 1 =$
 $-(x+2) \ln(1 - \ln(x+2)) - 1$ löst die
geg. DGL (Def-bereich $] -2, e-2[$)

$$\underline{\text{zu (b)}} \quad y' = \frac{x+2y+1}{2x+y+2} \quad (*6)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{(iii) ist anwendbar}$$

$$\text{eind Lsg von } x+2y+1=2x+y+2=0: (x_0, y_0) = (-1, 0)$$

$$\text{(iii)} \Rightarrow \text{benötige Lsg. von } y' = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} \quad (*7)$$

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{benötige Lsg. von } y' = \frac{1}{x} \left(\frac{1+2\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} - y \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1-y^2}{2+y} \right) \quad (*8)$$

Löse (*8) durch Trennung der Variablen

$$F(x) = \ln(x), \quad G(y) = \int \frac{y}{2+y} \frac{2+y}{1-y^2} dy = \frac{3}{2} \ln(y-1) +$$

$$\frac{1}{2} \ln(y+1) = \ln \left(\frac{(y-1)^{3/2}}{(y+1)^{1/2}} \right)$$

Bestimmung der Umkehrfkt $x = \ln \left(\frac{(y-1)^{3/2}}{(y+1)^{1/2}} \right) \Leftrightarrow$

$$e^x = \frac{(y-1)^{3/2}}{(y+1)^{1/2}} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{(y-1)^3}{y+1} \Leftrightarrow ?$$

(Scheinbar keine Auflösung nach y möglich)

zu (c) $y' = (x - y + 3)^2$ (*) $[y' = a + b f(y)]$

(i) $\Rightarrow$ benötigte Lsg. von $y' = 1 - y^2$ (*)

Lösung durch Trennung der Variablen

$$F(x) = \int_0^1 1 \cdot dt = x, \quad G(y) = \int_0^y \frac{y}{1-t^2} dt =$$

art $\tanh(y)$, Umkehrfkt. $\tanh$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \tanh(x) \text{ löst (*) (i) } \Rightarrow \varphi(x) = -\tanh(x) + x + 3$$

Aufgabe 3

zu (a) $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$
stetige Fkt., betrachte $y'' = f(y)$ (x_n)
auf $D = J \times \mathbb{R}$, $(a, b) \in D$

$$u: J \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto - \int_a^y f(\eta) d\eta$$

z.zg.: $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lsg. von (x_n)
 $\rightarrow t \mapsto \frac{1}{2} \varphi'(t)^2 + u(\varphi(t))$ ist konstant

φ ist Lsg. $\Rightarrow \varphi''(t) = f(\varphi(t)) \forall t \in I$

z.zg.: Für $\psi(t) = \frac{1}{2} \varphi'(t)^2 + u(\varphi(t))$

$$\text{gilt } \psi'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \psi'(t) &= \frac{1}{2} \cdot 2 \psi''(t) \cdot \psi'(t) + \\ &u'(\psi(t)) \psi'(t) = f(\psi(t)) \psi'(t) + \\ &- f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

zu (b) Sei E die konstante aus (a), d. h.

$$\frac{1}{2}(\psi'(t))^2 + u(\psi(t)) = E$$

$$\Leftrightarrow (\psi'(t))^2 = 2(E - u(\psi(t)))$$

$$\Leftrightarrow \psi'(t) = \begin{cases} \sqrt{2(E - u(\psi(t)))} & \text{falls } \psi'(t) > 0 \\ -\sqrt{2(E - u(\psi(t)))} & \text{falls } \psi'(t) < 0 \end{cases}$$

(Die Lösung der Aufgabenteile (c) und (d) wird noch ergänzt.)