Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Nach Folgerung 2.10 besitzt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G genau dann eine komplexe Stammfunktion, wenn $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G erfüllt ist. Diese Beziehung gilt also für beliebige Gebiete, nicht nur für einfach zusammenhängende. (Bei einfach zusammenhängenden Gebieten sind die beiden äquivalenten Aussagen automatisch erfüllt.) Eine Funktion f kann auf einem Gebiet G durchaus eine holomorphe Stammfunktion besitzen, ohne dass G einfach zusammenhängend ist. Beispielsweise ist $\mathbb{C}^\times$ nicht einfach zusammenhängend, aber die Funktionen $f(z) = z$ und $g(z) = \frac{1}{z^2}$ besitzen komplexe Stammfunktionen, nämlich $F(z) = \frac{1}{2}z^2$ bzw. $G(z) = -\frac{1}{z}$. Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ist einfach zusammenhängend, denn es ist bezüglich jedes Punkte $x \in \mathbb{R}^+$ sternförmig, wie man leicht überprüft.

zu (b) Die Cauchysche Integralformel lautet $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$. Dabei bezeichnet $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, $B_r(a)$ ist eine offene Kreisscheibe, deren Abschluss in U enthalten ist, und z bezeichnet einen beliebigen Punkt von $B_r(a)$.

zu (c) Auf Grund der Cauchyschen Integralformel gilt Auf Grund der Cauchyschen Integralformel und nach Proposition 3.2 gilt $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \bar{B}_1(0)} \frac{f(w)}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \bar{B}_1(0)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i = 1$ für alle $z \in B_1(0)$.

zu (d) Ja, das ist plausibel, und man kann es auch relativ einfach beweisen. Auf Grund der in Proposition 2.12 formulierten Homotopieinvarianz stimmen komplexe Wegintegrale überein, wenn die zugehörigen Integrationswege durch eine Homotopie ineinander überführt werden können. Ist beispielsweise γ die (gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Randkurve eines Quadrats Q, z ein Punkt im Inneren von Q und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf einer offenen Teilmenge $U \supseteq Q$ von $\mathbb{C}$ definiert ist, dann kann γ innerhalb von U durch eine Homotopie in eine kleine Kreiskurve γ_r um den Punkt z überführt werden. Auf diese wendet man den Cauchyschen Integralsatz an. Man erhält auf diese Weise $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} = f(z)$.

Aufgabe 1

zu (a) Die Kreisscheibe $\bar{B}_1(i)$ enthält die Nullstelle i des Nennerpolynoms $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$, aber nicht die Nullstelle $-i$, denn es gilt $|-i-i| = |-2i| = 2 > 1$. Der Definitionsbereich der Funktion $f(z) = e^z/(z+i)$ ist gegeben durch die offene Menge $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, und weil diese $\bar{B}_1(i)$ enthält, ist nach Lemma 3.3 auch die offene Kreisscheibe $B_{1+\varepsilon}(i)$ für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ noch im Definitionsbereich enthalten. Mit der Cauchyschen Integralformel erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(i)} \frac{e^w}{w^2+1}\,dw &= \int_{\partial B_1(i)} \frac{1}{w-i}\cdot\frac{e^w}{w+i}\,dw = \int_{\partial B_1(i)} \frac{f(w)}{w-i}\,dw \\ &= 2\pi i f(i) = 2\pi i\frac{e^i}{2i} = \pi e^i.\end{aligned}$$

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, die Aufgaben zu lösen. Zunächst zerlegt man die Funktion die Funktion $e^z/(z^2+1)$ wie in Aufgabe 1 (a) in die Summe $\frac{1}{2}ie^z/(z+i) + (-\frac{1}{2}i)e^z/(z-i)$. Wie wir bereits oben festgestellt haben, ist die Funktion $z \mapsto e^z/(z+i)$ auf $B_{1+\varepsilon}(i)$ für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ holomorph. Da diese offene Kreisscheibe ein konvexes Gebiet ist, kann der Cauchysche Integralsatz angewendet werden. Das Integral über den zweiten Summanden erhalten wir wieder durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel. Die Rechnung

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(i)} \frac{e^w}{w^2+1}\,dw &= \tfrac{1}{2}i \int_{\partial B_1(i)} \frac{e^w}{w+i}\,dw + (-\tfrac{1}{2}i)\int_{\partial B_1(i)} \frac{f(w)}{w-i}\,dw \\ &= \tfrac{1}{2}i \cdot 0 + (-\tfrac{1}{2}i)\cdot 2\pi i f(i) \quad = \quad \pi e^i \end{aligned}$$

führt natürlich zum selben Ergebnis.

zu (b) Wir zeigen, dass keine der Nullstellen des Nennerpolynoms $z^2(z^4+1)$ in $\bar{B}_1(2)$ liegt. Zunächst gilt $|0-2| = 2 > 1$ und somit $0 \notin \bar{B}_1(2)$. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ eine von Null verschiedene Nullstelle des Polynoms $z^2(z^4+1)$, dann muss $\alpha^4 + 1 = 0$ gelten. Es folgt $|\alpha|^4 = |\alpha^4| = |-1| = 1$, also $|\alpha| = 1$. Wäre nun α in $\bar{B}_1(2)$ enthalten, müsste also sowohl $|\alpha - 2| \le 1$ als auch $|\alpha| = 1$ gelten. Aus $|\alpha-2| \le 1$ folgt $|\mathrm{Re}(\alpha) - 2| \le 1$, also $\mathrm{Re}(\alpha) \ge 1$. Zusammen mit $|\alpha| = 1$ bleibt damit als einzige Möglichkeit $\alpha = 1$. Aber 1 ist keine Nullstelle von z^4+1.

Also ist die Funktion $z \mapsto z^7/(z^2(z^4+1))$ insgesamt auf $\bar{B}_1(2)$ holomorph. Wie unter (a) kann also der Cauchysche Integralsatz angewendet werden, und wir erhalten

$$\int\limits_{\partial B_1(2)} \frac{z^7}{z^2(z^4+1)}\,dz \quad = \quad 0.$$

(Es ist nicht schwer zu sehen, dass die komplexen Nullstellen von z^4+1 durch $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ gegeben sind.)

Aufgabe 2

zu (a) Auf Grund der Cauchyschen Integralformel gilt für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ jeweils

$$\int_{\partial B_r(0)} g(w)\,dw \quad = \quad \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w}\,dw \quad = \quad 2\pi i f(0) \quad \neq \quad 0.$$

Würde g auf $\mathbb{C}^\times$ eine komplexe Stammfunktion besitzen, dann müsste nach Folgerung 2.10 $\int_\gamma g(w)\,dw$ für jeden geschlossenen Integrationsweg gleich null sein. Aber wie wir gerade gesehen haben, ist dies nicht der Fall. Also besitzt g keine komplexe Stammfunktion.

zu (b) Durch Ableitung der Funktion g aus Teil (a) erhält man mit der komplexen Quotientenregel $g'(z) = \frac{f'(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2} = \frac{f'(z)}{z} - h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Wenn wir zeigen können, dass $z \mapsto \frac{f'(z)}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ eine komplexe Stammfunktion F besitzt, dann ist $F - g$ eine komplexe Stammfunktion von h, wie die Rechnung

$$(F-g)'(z) \quad = \quad F'(z) - g'(z) \quad = \quad \frac{f'(z)}{z} - \left(\frac{f'(z)}{z} - h(z)\right) \quad = \quad h(z)$$

zeigt. Weil f auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, existiert eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Dabei ist $a_1 = f'(0) = 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $f'(z) = \sum_{n=2}^\infty n a_n z^{n-1}$, und daraus folgt $\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=2}^\infty n a_n z^{n-2}$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Dabei hat die Potenzreihenentwicklung von f' denselben Konvergenzradius wie die Entwicklung von f, nämlich unendlich. Durch $\tilde{f}(z) = \sum_{n=2}^\infty n a_n z^{n-2}$ ist also eine holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto \frac{f'(z)}{z}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ ist (als sternförmige Menge) einfach zusammenhängend. Nach Satz 2.13 und Folgerung 2.10 ergibt sich, dass $\tilde{f}$ auf $\mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion besitzt. Schränkt man diese auf $\mathbb{C}^\times$ ein, so erhält man eine komplexe Stammfunktion von $z \mapsto \frac{f'(z)}{z}$.

Aufgabe 3

zu (a) Die Zahlen ζ und ζ^2 sind die beiden Nullstellen des Polynoms z^2+z+1. Denn wegen $\zeta^3 = (e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$ und $(\zeta^2)^3 = (\zeta^3)^2 = 1^2 = 1$ sind beides Nullstellen von $z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)$, wegen $\zeta, \zeta^2 \neq 1$ also auch Nullstellen von z^2+z+1. Nun sind ζ und ζ^2 für $r \in \mathbb{R}^+$ mit $r \neq 1$ genau dann in der offenen Kreisscheibe $B_r(0)$ enthalten, wenn $r > 1$ ist. Im Fall $r < 1$ ist f auf einer offenen und konvexen Umgebung von $\bar{B}_r(0$, zum Beispiel einer Kreisscheibe $B_s(0)$ mit $r < s < 1$, holomorph, und der Cauchysche Integralsatz liefert $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0$.

Setzen wir nun $r > 1$ voraus. Dann sind ζ und ζ^2 beide im Inneren von $\bar{B}_r(0$ enthalten. Wir schreiben die Funktion f so um, dass die Cauchysche Integralformel angewendet werden kann. Für alle $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{\alpha}{z-\zeta} + \frac{\beta}{z-\zeta^2} = \frac{1}{(z-\zeta)(z-\zeta^2)} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha(z-\zeta^2) + \beta(z-\zeta) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (\alpha+\beta)z + (-\alpha\zeta^2 - \beta\zeta) = 1$$

Durch Einsetzen von $z = 0$ erhalten wir die Gleichung $\alpha\zeta^2 + \beta\zeta = -1$, und Einsetzen von $z = 1$ und Subtraktion der ersten Gleichung liefert $\alpha + \beta = 0$. Setzen wir $\beta = -\alpha$ in die erste Gleichung ein, so folgt $\alpha(\zeta^2 - \zeta) = -1$, was wegen $\zeta^2 = -\zeta - 1$ zu $\alpha = -\frac{1}{3}(1+2\zeta)$ und $\beta = \frac{1}{3}(1+2\zeta)$ aufgelöst werden kann. Mit der Cauchyschen Integralformel erhalten wir nun

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \quad=\quad \tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\int_{\gamma_r} \frac{dw}{w-\zeta^2} - \tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\int_{\gamma_r} \frac{dw}{w-\zeta} \quad=$$

$$\tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\cdot 2\pi i - \tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\cdot 2\pi i \quad=\quad 0.$$

zu (b) Auf Grund der Rechnung in Aufgabenteil (a) gilt

$$\int_{\delta_r} f(z)\,dz \quad=\quad \tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\int_{\delta_r} \frac{dw}{w-\zeta^2} - \tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\int_{\delta_r} \frac{dw}{w-\zeta}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist gleich null auf Grund der Cauchyschen Integralformel. Denn am Argument $\frac{4\pi}{3}$ von ζ^2 lässt sich erkennen, dass die Nullstelle der Nennerfunktion $w-\zeta^2$ einen negativen Imaginärteil besitzt, wärend die geschlossene Kurve δ_r vollständig im Bereich $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ verläuft. Beim zweiten Integral auf der rechten Seite kann auf Grund des Hinweises die Kurve δ_r durch γ_r ersetzt werden, denn die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-\zeta}$ ist auf der offenen Umgebung $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\} \supseteq H_r^- \cup \mathrm{sp}(\gamma_r)$ holomorph. Mit der Cauchyschen Integralformel erhalten wir insgesamt

$$\int_{\delta_r} f(z)\,dz \quad=\quad -\tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\int_{\delta_r} \frac{dw}{w-\zeta} \quad=\quad -\tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\int_{\gamma_r} \frac{dw}{w-\zeta} \quad=\quad -\tfrac{1}{3}(1+2\zeta)\cdot 2\pi i.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen. Durch Lösen der quadratischen Gleichung mit der „Mitternachtsformel" findet man für das Polynom z^2+z+1 die beiden Nullstellen $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Wegen $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ muss $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ gelten. Es folgt $1 + 2\zeta = 1 + (-1) + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}$ und $\int_{\delta_r} f(z)\,dz = -\frac{1}{3}\cdot i\sqrt{3}\cdot 2\pi i = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

zu (c) Wir schätzen das Integral $\int_{\gamma_r|_{[0,\pi]}} f(z)\,dz$ nach oben ab. Für alle $z \in \mathrm{sp}(\gamma_r|_{[0,\pi]})$ gilt $|z| = r$. Für hinreichend großes r gilt $r^2 > 2r+2$. Damit erhalten wir $|z+1| \leq |z| + 1 \leq r+1 < 2r+2 < r^2 = |z^2|$ und weiter $|z^2 - z - 1| \geq |z^2| - |r+1| \geq r^2 - (r+1) > \frac{1}{2}r^2$. Es folgt $|f(z)| < 2r^{-2}$ für alle $z \in \mathrm{sp}(\gamma_r|_{[0,\pi]})$.

Da es sich bei $\gamma_r|_{[0,\pi]}$ um einen Halbkreis vom Radius r handelt, ist die Länge des Integrationsweges durch $\ell(\gamma_r|_{[0,\pi]}) = \pi r$ gegeben. Mit Satz 2.1 (ii) erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\int_{\gamma_r|_{[0,\pi]}} f(z)\,dz\right| \quad\leq\quad 2r^{-2}\cdot \ell(\gamma_r|_{[0,\pi]}) \quad=\quad 2r^{-2}\cdot \pi r \quad=\quad \frac{2\pi}{r}.$$

Dies zeigt, dass $\lim_{r\to+\infty}\left|\int_{\gamma_r|_{[0,\pi]}} f(z)\,dz\right| = 0$ gilt.

Mit dem Ergebnis aus Teil (b) erhalten wir wegen $\delta_r = [-r,r] + \gamma_r|_{[0,\pi]}$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1} \quad &= \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{dz}{z^2+z+1} \quad = \quad \lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\delta_r} f(z)\,dz - \int_{\gamma_r|_{[0,\pi]}} f(z)\,dz\right) \\ &= \quad \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \int_{\gamma_r|_{[0,\pi]}} f(z)\,dz\right) \quad = \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r|_{[0,\pi]}} f(z)\,dz \quad = \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0 \quad = \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$