Lösung Globalübungsblatt 9

Cauchyscher Integralsatz:

$G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph,
γ geschlossene Kurve in $G \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Cauchysche Integralformel:

$G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $a \in G$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\overline{B}_r(a) \subseteq G$
$f: G \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow f(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \forall z \in B_r(a)$

Aufgabe 1 $\gamma = \partial B_2(0) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 2e^{it}$

Ziel: Berechnung der drei angeg. Kurvenintegrale

$\partial B_r(a)$

Aufgabe 1 $\gamma = \partial B_2(0) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 2e^{it}$

<u>zu (a)</u> $$\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz$$

Nullstellen der Nennerfkt: ± 3 und $-i$

Die Fkt. $f(z) = \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}$ ist also definiert auf dem Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{-3, 3, -i\}$

Betrachte die Funktion $g(z) = \frac{z}{9-z^2} \Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{z+i}$

Die einzigen Nullst. von g sind ± 3, liegen wegen $|\pm 3| = 3 > 2$ außerhalb von $\overline{B}_2(0) \Rightarrow \overline{B}_2(0)$ liegt im Def.-bereich von g, g auf Def.-G holomorph $\Rightarrow$ Cauchysche Integralformel anwendbar

Der Punkt $z = -i$ darf in die Formel eingesetzt werden, da $|-i| = 1 < 2$ und somit $-i \in B_2(0)$ gilt

$$\Longrightarrow \quad g(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(w)}{w+i}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)\, dw$$

$$\Longrightarrow \quad \int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i\, g(-i)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-i}{9-(-i)^2} \right) = 2\pi i \frac{(-i)}{10}$$

$$= \frac{1}{5}\pi$$

Anwendung der Cauch…

auf die Fkt. $g(z)$…

Punkte $0, 1$ (zu…

liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{5w-2}{w-1}\, dw = \ldots$$

und $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{5w-2}{w}\, dw = \ldots$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(w)\, dw = \int_\gamma \frac{5w\ldots}{w-\ldots} \ldots$$

$$= 6\pi i - (-4\pi i) = \ldots$$

zu (b) $\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)} \, dz = ?$

Nullstellen des Nenners: 0, 1

$\Rightarrow$ Fkt. $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ unter dem Integralzeichen ist definiert auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

Ansatz: $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \; 1 = a(z-1) + bz = (a+b)z - a$

wird gelöst durch $a = -1, \; b = 1$

$\Rightarrow \; \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \Rightarrow f(z) = \frac{5z-2}{z-1} - \frac{5z-2}{z}$

Anwendung der Cauchyschen Integralformel auf die Fkt. $g(z) = 5z - 2$ und die Punkte $0, 1$ (zulässig, da $0, 1 \in B_2(0)$) liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{5w-2}{w-1}\, dw = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-1}\, dw = g(1) = 3$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{5w-2}{w}\, dw = \int_\gamma \frac{g(w)}{w}\, dw = g(0) = -2$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(w)\, dw = \int_\gamma \frac{5w-2}{w-1}\, dw - \int_\gamma \frac{5w-2}{w}\, dw$$

$$= 6\pi i - (-4\pi i) = 10\pi i$$

zu (c) $\int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\, dz = ?$

Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in B_r(a)$$

$$\Longrightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw \quad \forall z \in B_r(a)$$

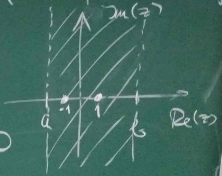
Wende dies an auf $f(z) = e^{-z}$ und $z = 1$.

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{e^{-w}}{(w-z)^2}\, dw = \int \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw = 2\pi i\, f'(1)$$

$$= 2\pi i(-e^{-1}) = -2\pi i\, e^{-1}$$

Aufgabe 2 $\quad f: \mathbb{C}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z^2-1}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ definiere $U_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}(z) < b\}$



zu zeigen: Äquivalenz der Aussagen

(i) $f|_{U_{a,b}\setminus\{\pm 1\}}$ hat eine eind. best. komplexe Stammfkt. F mit $F(0)=0$

(ii) $a \ge -1$ und $b \le 1$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Unter der Vor. (ii) gilt $U_{a,b}\setminus\{\pm 1\} = U_{a,b}$

<u>Bem.</u> $U_{a,b}$ ist konvexes Gebiet

„(iii) ⇒ (i)"

<u>Beh.</u> $U_{a,b}$ ist konvexes Gebiet

Aus „konvex" folgt automatisch „zusammenhängend"

Die Menge ist konvex, denn: Seien $z, w \in U_{a,b}$ vorgeg.

$\Rightarrow a < Re(z), Re(w) < b \Rightarrow$ Für jedes $t \in [0,1]$ gilt

$Re((1-t)z + tw) = (1-t) Re(z) + t Re(w) > (1-t)a + ta = a$

und $Re((1-t)z + tw) = (1-t) Re(z) + t Re(w) < (1-t)b + tb = b$

d.h. $(1-t)z + tw \in U_{a,b}$ also $[z,w] \subseteq U_{a,b}$

Die Menge $U_{a,b}$ ist offen als Urbild der offenen Teilmenge $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abb. $\mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto Re(z)$

(⇒ Beh.) Da f (wg. $\pm 1 \notin U_{a,b}$) auf $U_{a,b}$ holomorph ist, kann Prop. 2.8 angewendet werden ⇒ f hat komplexe Stammfkt. F auf $U_{a,b} = U_{a,b} \setminus \{\pm 1\}$ mit $F(0) = 0$

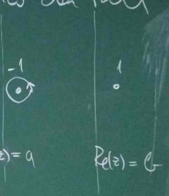
(Eine konvexe Menge ist sternförmig bzgl jedem ihrer Punkte, deshalb kann der Punkt c mit $F(c) = 0$ frei in $U_{a,b}$ gewählt werden.)

zur Eindeutigkeit: Ang. $G: U_{a,b} \to \mathbb{C}$ ist weitere kompl. Stammfkt von f auf $U_{a,b}$ $\Rightarrow$ $G'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0 \ \forall z \in U_{a,b}$ $\Rightarrow$ $G - F$ ist konstant auf $U_{a,b}$. Gilt außerdem $G(0) = 0$, dann muss die Konstante wegen $G(0) - F(0) = 0 - 0 = 0$ null sein.

$\Rightarrow F = G$

„(i) ⇒ (ii)" durch Kontraposition. Ang. (ii) gilt nicht.

Dann gilt $a < -1$ oder $b > 1$. Betrachte nur den Fall $a < -1$, der andere Fall läuft analog.



Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $\varepsilon < -1-a$ und $\varepsilon < 2$ sowie $\varepsilon < b+1$.

Dann gilt $\overline{B}_\varepsilon(-1) \subseteq U_{a,b}$ und $1 \notin \overline{B}_\varepsilon(-1)$.

$\Rightarrow$ Der D.-f.-Bereich $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ der Fkt. $g(z) = \frac{1}{z-1}$ enthält $\overline{B}_\varepsilon(-1)$ $\Rightarrow$ Cauchysche Integralformel anwendbar

$$\Rightarrow \int_{\partial B_\varepsilon(-1)} f(w)\,dw = \int_{\partial B_\varepsilon(-1)} \frac{dw}{(z-1)(z+1)} = \int_{\partial B_\varepsilon(-1)} \frac{g(w)}{w+1}\,dw = 2\pi i\, g(-1) = 2\pi i \frac{1}{(-2)} = -\pi i \neq 0$$

Es gilt in

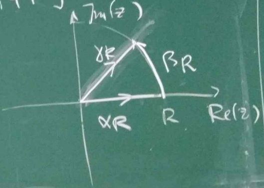
$U_{a,b} \setminus \{\pm 1\}$ also einen geschlossenen Integrationsweg γ mit $\int_\gamma f(w)\,dw \neq 0$. Folglich besitzt f auf $U_{a,b} \setminus \{\pm 1\}$ keine komplexe Stammfkt. $\square$

$$\gamma(t) = -1 + \varepsilon \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

<u>Aufgabe 3</u>

<u>zu (a)</u> geg. $R \in \mathbb{R}^+$, $\beta_R : [0, \frac{1}{4}\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$ z.zg.:

$$\left| \int_{\beta_R} e^{iz^2}\, dz \right| \leq \frac{4}{\pi R}$$



<u>zu (b)</u>

$\int_{-\infty}^{+\infty} e$

$\gamma_R'(t)$

$\int_{\gamma_R} e^{i}$

$\int_0^R e$

$e^{\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} +$

Für jedes $t \in [0, \frac{1}{4}\pi]$ gilt $i\beta_R(t)^2 = iR^2 e^{2it}$

$$\Rightarrow \left| e^{i\beta(t)^2} \right| = \left| e^{iR^2 e^{2it}} \right| = \left| e^{iR^2(\cos(2t) + i\sin(2t))} \right|$$

$$= \left| e^{R^2(-\sin(2t) + i\cos(2t))} \right| = e^{-R^2 \sin(2t)} \underset{\uparrow \text{ Angabe}}{\leq} e^{-\frac{1}{4}\pi R^2 t}$$

außerdem: $\beta_R'(t) = iRe^{it} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \left| \int_{\beta_R} e^{iz^2} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{i\beta(t)^2} \beta'(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{4}\pi} Re^{-\frac{1}{4}\pi R^2 t} dt \leq \int_0^1 Re^{-\frac{1}{4}\pi R^2 t} = \left[-\frac{4}{\pi R^2} \cdot R \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi R^2 t} \right]_0^1 = \frac{4}{\pi R}\left(1 - e^{-\frac{1}{4}\pi R^2}\right) \leq \frac{4}{\pi R}$$

Es gilt

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \to +\infty}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right.$$

$$= (1+i$$

zu (6) geg. $\gamma_R : [0,R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t e^{\frac{1}{4}\pi i}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{z.zg.} \ \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$\gamma_R'(t) = e^{\frac{1}{4}\pi i} \quad \forall\, t \in [0,R]$$

$$\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{i\gamma_R(t)^2}\gamma_R'(t)\,dt = \int_0^R e^{i(te^{\frac{\pi i}{4}})^2} e^{\frac{\pi i}{4}}\,dt = \int_0^R e^{it^2 e^{\frac{\pi i}{2}}} e^{\frac{\pi i}{4}}\,dt$$

$$= \int_0^R e^{it^2 i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\int_0^R e^{-t^2}\,dt$$

$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

$e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$

Es gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(-x)^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\Longrightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz - \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\int_{0}^{R} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Aufgabe 3

zu (c) Durch $\alpha_R + \beta_R - \gamma_R$ ist ein geschlossener Weg definiert, und $f(z) = e^{iz^2}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes gilt also

$$\int_{\alpha_R} e^{iz^2}\,dz + \int_{\beta_R} e^{iz^2}\,dz - \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0.$$

Einsetzen der Ergebnisse aus Teil (a) und (b) liefert

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt + i \int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt = \lim_{R\to+\infty} \left(\int_0^R \left(\cos(t^2) + i \sin(t^2)\right) dt \right) =$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha_R} e^{iz^2}\,dz = \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz - \int_{\beta_R} e^{iz^2}\,dz \right) =$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz - \lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} e^{iz^2}\,dz = (1+i)\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - 0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten erhalten wir $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.