

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 6 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) *Satz über die monotone Konvergenz:*

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fast überall monoton wachsende Folge von Funktionen auf A mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integrale $\int_A f_m(x) dx$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert und $\lim_m \int_A f_m(x) dx = \int_A f(x) dx$ gilt.

Satz über die majorisierte Konvergenz:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Es sei außerdem $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f_m| \leq g$ für alle $m \in \mathbb{N}$ jeweils fast überall erfüllt ist. Dann ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\lim_m \int_A f_m(x) dx = \int_A f(x) dx$.

zu (b) Im Einleitungsteil von §6 wurde eine Folge $(\chi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $\chi_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die punktweise und monoton wachsend gegen die Dirichlet-Funktion $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Jede der Funktionen χ_m besitzt nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, ist also nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium Riemann-integrierbar, und die Folge $\int_0^1 \chi_m(x) dx$ der Integrale ist beschränkt (da die Folge konstant null ist). Aber der punktweise Limes von χ ist nirgends stetig und somit auf Grund des Lebesgueschen Integrabilitätskriterium *nicht* Riemann-integrierbar. Das Beispiel zeigt, dass weder der Satz über die monotone Konvergenz noch der Satz über die majorisierte Konvergenz für Riemann-integrierbare Funktionen gültig ist. (Bei der majorisierten Konvergenz kann als konvergente Majorante $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit dem konstanten Wert 1 genommen werden.)

Ein weiteres Gegenbeispiel zur monotonen Konvergenz erhält man, indem man eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{m} < x \leq 1 \end{cases}$$

Auch hier liegt punktweise und monoton wachsende Konvergenz vor, und jedes f_m ist Riemann-integrierbar, da es jeweils nur eine einzige Unstetigkeitsstelle gibt. Außerdem ist die Folge der Integrale nach oben beschränkt, denn es gilt $\int_0^1 f_m(x) dx = [2x^{1/2} dx]_{1/m}^1 = 2(1 - \frac{1}{\sqrt{m}})$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Der punktweise Limes f ist aber eine unbeschränkte Funktion und als solche nicht Riemann-integrierbar.

zu (c) Ist $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil, sind $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ also die eindeutig bestimmten Funktionen mit $f(t) = g(t) + ih(t)$ für alle $t \in I$, und ist $F = G + iH$ die entsprechende Zerlegung für F , dann sind G und H beide auf I differenzierbar, und es gilt $G' = g$ und $H' = h$.

zu (d) Das komplexe Kurvenintegral ist $\int_\gamma f(z) dz$ ist nach Definition gleich dem $\mathbb{C}$ -wertigen Integral $\int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt$. Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ also eine Funktion mit $F'(t) = (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t)$ für alle $t \in]a, b[$, dann ist $\int_\gamma f(z) dz = F(b) - F(a)$.

Aufgabe 1

zu (a) Beide Aussagen ergeben sich aus dem Quotientenkriterium. Sei $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Da die absolute Konvergenz der Reihen im Nullpunkt offensichtlich ist (hier gibt es nur einen einzigen Term ungleich null), können wir $x \neq 0$ annehmen. Wir setzen $a_n = \frac{x^{2n}}{n!}$ und $b_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{n+1}.$$

Es gilt also $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{|x|^2}{n+1} = |x|^2 \cdot \lim_n \frac{1}{n+1} = |x|^2 \cdot 0 = 0$. Die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums sind also erfüllt, folglich konvergiert zugehörige die Reihe in x absolut. Ebenso zeigt die Rechnung

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{|x|^{2n+3}}{(n+1)!} \cdot (2n+1) \cdot \frac{n!}{|x|^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{|x|^2}{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{3}{2n}} \cdot |x|^2 \cdot \frac{1}{n+1},$$

dass die Folge $(\frac{b_{n+1}}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $1 \cdot |x|^2 \cdot 0 = 0$ konvergiert, die entsprechende Reihe also absolut konvergiert.

zu (b) Offenbar gilt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bekanntlich ist die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Also Komposition der stetigen Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto e^x$ ist also auch f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Auch die Einschränkung von f auf ein beliebiges endliches, abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist stetig. Wie in der Analysis einer Variablen gezeigt wurde, ist $f|_{[a,b]}$ damit Riemann-integrierbar. Laut der aktuellen Vorlesung impliziert Riemann-Integrierbarkeit jeweils Lebesgue-Integrierbarkeit, also ist $f|_{[a,b]}$ auch Lebesgue-integrierbar.

zu (c) In der Analysis einer Variablen wurde gezeigt: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $a \in \mathbb{R}$, und ist $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist F eine Stammfunktion von f , d.h. F ist differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb genügt es zu zeigen, dass $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Auf Grund der Rechenregeln für das Riemann-Integral können wir uns dabei auf den Fall $a < b$ beschränken.

Seien also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ vorgegeben. Wir wenden den Satz über die monotone Konvergenz an auf die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ der Funktionen $f_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^{2k}}{k!}$. Wegen $x^{2k} \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist diese Folge überall monoton wachsend. Die Integrale der Folgenglieder sind gegeben durch

$$\int_a^b f_m(x) dx = \sum_{k=0}^m \int_a^b \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^m \left[\frac{1}{2k+1} \cdot \frac{x^{2k}}{k!} \right]_a^b = \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{b^{2k}}{k!} - \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{a^{2k}}{k!}.$$

Offenbar ist diese Folge der Integrale durch $F(b) - F(a)$ beschränkt. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über die monotone Konvergenz erfüllt. Es existiert demnach eine Lebesgue-integrierbare Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall in $[a, b]$ gegen h konvergiert und $\lim_m \int_a^b f_m(x) dx = \int_a^b h(x) dx$ gilt.

Weil $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ überall in $[a, b]$ gegen $f(x) = e^{x^2}$ konvergiert, stimmt f auf $[a, b]$ fast überall mit h überein, und folglich sind die Lebesgue-Integrale gleich. Weil f , wie oben festgestellt, Riemann-integrierbar ist, ist das Lebesgue-Integral zugleich das Riemann-Integral von f . Wir erhalten damit insgesamt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b h(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(x) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{b^{2k}}{k!} - \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{a^{2k}}{k!} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{b^{2m}}{m!} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{a^{2m}}{m!} = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

zu (a) Sei $f, f_1 : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbare, komplexwertige Funktionen auf einem offenen Intervall, und seien $f = g + h$ und $f_1 = g_1 + ih_1$ die Zerlegungen von f in Real- und Imaginärteil. Dann ist $f + f_1 = (g + g_1) + i(h + h_1)$ die Zerlegung von $f + f_1$ in Real- und Imaginärteil, und wegen $ff_1 = (g + ih)(g_1 + ih_1) = gg_1 + ig_1h + igh_1 - hh_1 = (gg_1 - hh_1) + i(g_1h + gh_1)$ ist $gg_1 - hh_1$ der Realteil von ff_1 und $g_1h + gh_1$ der Imaginärteil von ff_1 . Nach Definition, und auf Grund der herkömmlichen Summenregel, gilt nun

$$\begin{aligned} (f + f_1)'(t) &= (g + g_1)'(t) + i(h + h_1)'(t) = g'(t) + g_1'(t) + ih'(t) + ih_1'(t) = \\ &= g'(t) + ih'(t) + g_1'(t) + ih_1'(t) = f'(t) + f_1'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) + ih'(t) = (gg_1 - hh_1)'(t) + i(g_1h + gh_1)'(t) = \\ &= (gg_1)'(t) - (hh_1)'(t) + i(g_1h)'(t) + i(gh_1)'(t) = \\ &= g'(t)g_1(t) + g(t)g_1'(t) - h'(t)h_1(t) - h(t)h_1'(t) + ig_1'(t)h(t) + ig_1(t)h'(t) + ig'(t)h_1(t) + ig(t)h_1'(t) = \\ &= g'(t)g_1(t) + ih'(t)g_1(t) + ig'(t)h_1(t) - h'(t)h_1(t) + g(t)g_1'(t) + ih(t)g_1'(t) + ig(t)h_1'(t) - h(t)h_1'(t) = \\ &= (g'(t) + ih'(t))(g_1(t) + ih_1(t)) + (g(t) + ih(t))(g_1'(t) + ih_1'(t)) = f'(t)f_1(t) + f(t)f_1'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

zu (b) Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Hilfsfunktion $h_n(t) = \gamma(t)^n$. Aus $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ folgt $h_1'(t) = \gamma'(t) = q - p$. Die Produktregel liefert außerdem

$$h_2'(t) = (\gamma \cdot \gamma)'(t) = \gamma'(t)\gamma(t) + \gamma(t)\gamma'(t) = 2\gamma'(t)\gamma(t) = 2(q-p)\gamma(t)$$

und

$$h_3'(t) = (h_2 \cdot \gamma)'(t) = h_2'(t)\gamma(t) + h_2(t)\gamma'(t) = 2(q-p)\gamma(t)^2 + (q-p)\gamma(t)^2 = 3(q-p)\gamma(t)^2.$$

Somit ist h_1 Stammfunktion der konstanten $\mathbb{C}$ -wertigen Funktion $t \mapsto q - p$, es ist $\frac{1}{2}h_2$ Stammfunktion von $t \mapsto (q-p)\gamma(t)$, und $\frac{1}{3}h_3$ ist Stammfunktion von $t \mapsto (q-p)\gamma(t)^2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_p^q f(z) dz &= \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = (q-p) \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) dt = \\ &= \int_0^1 (q-p)\gamma(t)^2 dt - 5 \int_0^1 (q-p)\gamma(t) dt + 7 \int_0^1 (q-p) dt = \\ &= \frac{1}{3}(h_3(1) - h_3(0)) - \frac{5}{2}(h_2(1) - h_2(0)) + 7(h_1(1) - h_1(0)) = \\ &= \left(\frac{1}{3}\gamma(1)^3 - \frac{5}{2}\gamma(1)^2 + 7\gamma(1)\right) - \left(\frac{1}{3}\gamma(0)^3 - \frac{5}{2}\gamma(0)^2 + 7\gamma(0)\right) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(q) - F(p). \end{aligned}$$