Lösung Globalübungsblatt 4

Aufgabe 1 $\quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 8-(x^2+y^2)^{3/2},\ x^2+y^2 \le 4\}$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(i) gesucht: Parametrisierung von S

(ii) Berechnung von $\int_{(B,\phi)} \langle \mathrm{rot}(F), dA \rangle$ mit dem Stokes'schen Integralsatz

zu (i) Setze $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$ (abg. Vollkreis vom Radius 2), definiere

$\phi: B \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 8-(x^2+y^2)^{3/2} \end{pmatrix}$

zu (ii) Def für B die positiv orientierte Randkurve

$\tau : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$. Definiere γ:

$[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma = \phi \circ \tau$. $\Big(\Rightarrow \gamma(t) = (\phi \circ \tau)(t)$

$$= \phi \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 8 - 4^{3/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0, 2\pi] \Big)$$

Stokes'scher Integralsatz $\Rightarrow \int_{(B,\phi)} \langle \mathrm{rot}(F), dA \rangle = \int_\gamma \langle F, ds \rangle$.

Berechnung des Kurvenintegrals:

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle \, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left\langle F \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 8\sin(t)^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= -16 \int_0^{2\pi} \sin(t)^4 \, dt$$

Rekursionsformeln (Blatt 2, Globalaufg. 2)

$$\Rightarrow \int \sin(t)^2 \, dt = \tfrac{1}{2} t - \tfrac{1}{2} \sin(t) \cos(t)$$

$$\int \sin(t)^4 \, dt = \tfrac{3}{4} \int \sin(t)^2 \, dt - \tfrac{1}{4} \sin(t)^3 \cos(t)$$

$$= \tfrac{3}{8} t - \tfrac{3}{8} \sin(t)\cos(t) - \tfrac{1}{4} \sin(t)^3 \cos(t)$$

einsetzen $\Rightarrow \int_\gamma \langle F, ds \rangle =$

$$-16 \left[\tfrac{3}{8} t - \tfrac{3}{8} \sin(t)\cos(t) - \tfrac{1}{4} \sin(t)^3 \cos(t) \right]_0^{2\pi}$$

$$= -16 \left(\tfrac{3}{8}(2\pi) - \tfrac{3}{8}\, 0 \right) = -12\pi$$

Probe: direkte Berechnung des Flächenintegrals

... die Berechnung des Flächenintegrals

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot}(F)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 8-(x^2+y^2)^{3/2} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3x\sqrt{x^2+y^2} & -3y\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(e_1) \times \phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3x\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3y\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x\sqrt{x^2+y^2} \\ 3y\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= -$ ...

$= -$ ...

Aufga...

zu (a) ...

$\int \sqrt{x^2+} \dots$

$-\int x \cdot \dots$

$= x\sqrt{x^2+} \dots$

$$\int_{(B,\phi)} \langle \mathrm{rot}(F), dA \rangle = \int_B \langle (\mathrm{rot}(F)\circ\phi)(x,y), \phi'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2)$$

$$d(x,y) = \int_B \left\langle \mathrm{rot}(F)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 8-(x^2+y^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3x\sqrt{x^2+y^2} \\ 3y\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y)\right.$$

$$= \int_B \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3x\sqrt{x^2+y^2} \\ 3y\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y) =$$

$$\int_B (-3y^2)\, d(x,y) = \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} (-3r^2\sin(\varphi)^2)\, r\, d(r,\varphi)$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (-3r^2\sin(\varphi)^2) r\, d(r,\varphi) \right) =$$

$$-3\int_0^2 r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2\, d\varphi \right) dr$$

$$= -3 \int_0^2 r^3 \left[\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin(\varphi)\cos(\varphi) \right]_0^{2\pi} dr$$

$$= -3\pi \int_0^2 r^3 \, dr = -3\pi \left[\tfrac{1}{4} r^4 \right]_0^2 = -12\pi$$

<u>Aufgabe 2</u>

zu (a) Ziel: Berechnung von $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$
und $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = x\sqrt{x^2+1}$$

$$- \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

umformen $\Rightarrow \displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\left[\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \underset{\Leftarrow\, x=\sin(t)}{\overset{\Leftrightarrow\, t=\arcsin(x)}{=}} \int \frac{\cos(t)\,dt}{\sqrt{1-\sin(t)^2}} = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt = t \right.$$

$$\left. = \arcsin(x)\ \right]$$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$\Rightarrow \cosh(x)^2 = \sinh(x)^2 + 1$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$,

$\cosh'(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \underset{\hat{=}\, x=\sinh(t)}{\overset{t=\operatorname{arcsinh}(x)}{=}} \int \frac{\cosh(t)\,dt}{\sqrt{\sinh^2(t)+1}} = \int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)}\,dt$$

$$= t = \operatorname{arcsin}h(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

einsetzen $\Rightarrow \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

analog: $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

zu (b) gesucht: Inhalt der Flache

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2+1,\ z \in [0,h]\}$$

Dies ist eine Rotationsfläche zur Funktion

$$f: [0,h] \to \mathbb{R}_+,\ t \mapsto \sqrt{t^2+1}$$

Tutoriumsblatt $\Rightarrow v_2(H) = 2\pi \int_0^h f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$

hier: $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow f(t)\cdot\sqrt{1+f'(t)^2} =$

$$\sqrt{t^2+1}\,\sqrt{1+\frac{t^2}{t^2+1}} = \sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{\frac{t^2+1+t^2}{t^2+1}} = \sqrt{2t^2+1}$$

$$\Rightarrow V_2(H) = 2\pi\int_0^h \sqrt{2t^2+1}\,dt = 2\pi\int_0^h \sqrt{(\sqrt{2}t)^2+1}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\pi\int_0^h \sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}t)^2+1}\,dt = \sqrt{2}\pi\int_0^{\sqrt{2}h}\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$\sqrt{2}\pi\left[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_0^{\sqrt{2}h} =$$

$$\pi h\sqrt{2h^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\ln\left(\sqrt{2}h+\sqrt{2h^2+1}\right)$$

Aufgabe 3

zu (a) gesucht: unbestimmtes Integral $\int (1+x^2)^{-3/2}\,dx$

$$\int (1+x^2)^{-3/2}\,dx \underset{x=\sinh(t)}{=} \int \cosh(t)\,\left(1+\sinh(t)^2\right)^{-3/2}\,dt$$

$$= \int \cosh(t)\,\left(\cosh(t)^2\right)^{-3/2}\,dt = \int \frac{1}{\cosh(t)^2}\,dt$$

$$= \tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{\sinh(t)}{\sqrt{1+\sinh(t)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

zu (b) Zylinder $Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in[-h,h],\ x^2+y^2\le R^2\}$

Parametrisierung der Zylinderdeckel:

Setze $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2\}$.

$\phi^+ : B\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\\h\end{pmatrix}$, $\phi^- : B\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\\-h\end{pmatrix}$

zu (c) äußeres Einheitsnormalenfeld

oberer Deckel: $\nu\begin{pmatrix}x\\y\\h\end{pmatrix} = e_3$

unterer Deckel: $\nu\begin{pmatrix}x\\y\\-h\end{pmatrix} = -e_3$

Mantel: $\nu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$

Nachtrag zu (b): $\phi^0 : [-h,h]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$\begin{pmatrix}z\\ \varphi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}R\cos(\varphi)\\ R\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}$

$\boxed{D = \varepsilon_0 E}$

zu (d) z.z.: $\int_{(\partial Z,\nu)} \langle D, dA\rangle = q$

wobei $D(x,y,z) = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\|(x,y,z)\|_2^3}(x,y,z)$

Berechnu

$\phi^+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\phi^+)'($

$\Rightarrow \int_{(B,\phi)} \langle D$

$= \frac{qh}{4\pi}\int_B$

$= \frac{qR}{4\pi}\int_{[0,R}$

$= \frac{qh}{2}\int_0^R ($

Berechung für den Zylinderdeckel:

$$\phi^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix} \rightarrow (\phi^+)' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\phi^+)' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (e_1) \times (\phi^+)' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (e_2) = e_1 \times e_2 = e_3$$

$$\Rightarrow \int_{(B,\phi)} \langle D, dA \rangle = \frac{q}{4\pi} \int_B \left\langle (x^2+y^2+h^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y)$$

$$= \frac{qh}{4\pi} \int_B (x^2+y^2+h^2)^{-3/2} \, d(x,y)$$

$$= \frac{qh}{4\pi} \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} (r^2+h^2)^{-3/2} \, r \, d(r,\varphi)$$

$$= \frac{qh}{2} \int_0^R (r^2+h^2)^{-3/2} \, r \, dr =$$

$$\frac{qh}{4}\int_0^R (r^2+h^2)^{-3/2}(2r)\,dr = \frac{qh}{4}\int_0^{R^2+h^2} x^{-3/2}\,dx$$

$$= \frac{qh}{4}\Big[(-2)\,x^{-1/2}\Big]_{h^2}^{R^2+h^2} = -\frac{qh}{2}\Big[x^{-1/2}\Big]_{h^2}^{R^2+h^2}$$

$$= \frac{qh}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

Zylinder Boden $\frac{qh}{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{h}\right)$

Zylindermantel $-qh\,\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}$