

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Bezeichnen wir die besagte Achtelkugel im $\mathbb{R}^3$ mit A , so gilt offenbar $\phi(A) = A$, denn für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt die Äquivalenz $0 \leq x, y, z \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2, y^2, z^2 \leq 1$. Die Ableitung von ϕ ist gegeben durch $\phi'(x, y, z) = \text{diag}(2x, 2y, 2z)$, und die Determinante der Ableitung ist $\det \phi'(x, y, z) = 8xyz$. Also hat der Transformationssatz in dieser Situation die Form

$$\int_A f(x, y, z) d(x, y, z) = 8 \int_A (f \circ \phi)(x, y, z) xyz d(x, y, z)$$

für jede stetige Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

zu (b) Durch die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ wird die Ebene in alle Richtungen um den Faktor 2 gestreckt. Deshalb ist es plausibel, dass sich die Kurvenlänge verdoppelt. Die Ableitung von ϕ ist konstant und in jedem Punkt gegeben durch die Diagonalmatrix $\text{diag}(2, 2)$. Es gilt also $\phi'(x, y)(v) = 2v$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$. Setzen wir $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma$, dann erhalten wir mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\begin{aligned} \ell(\tilde{\gamma}) &= \int_a^b \|(\tilde{\phi})'(t)\|_2 dt = \int_a^b \|(\phi \circ \gamma)'(t)\|_2 dt = \int_a^b \|\phi'(\gamma(t))(\gamma'(t))\|_2 dt = \\ &= \int_a^b \|2\gamma'(t)\|_2 dt = 2 \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = 2\ell(\gamma). \end{aligned}$$

zu (c) Bei Kurvenintegralen 1. Art integriert man eine reellwertige Funktion über eine Kurve, bei Kurvenintegralen 2. Art arbeitet man mit einem Vektorfeld. Bei ersteren ist das Integral unabhängig davon, in welche Richtung man die Kurve durchläuft. Bei letzteren kommt es zu einem Vorzeichenwechsel, wenn man die Durchlaufrichtung umkehrt.

Aufgabe 1

zu (a) Sei $B = [1, 2] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Dann gilt $\rho_{\text{kug}}(B) = R$. Die Menge $N = [1, 2] \times \{0, \pi\} \times [0, 2\pi] \cup [1, 2] \times [0, \pi] \times \{0, 2\pi\}$ ist eine Nullmenge, und ρ_{kug} ist auf $B \setminus N = [1, 2] \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ injektiv.

zu (b) Durch Anwendung des Ergebnisses von Teil (a) und des Transformationssatzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_R f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\rho_{\text{kug}}(B)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \\ &= \int_B (f \circ \rho_{\text{kug}})(r, \vartheta, \varphi) |\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi)| d(r, \vartheta, \varphi) = \int_B (f \circ \rho_{\text{kug}})(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Für alle $(r, \vartheta, \varphi) \in B$ gilt nach Definition der Kugelkoordinaten-Abbildung $\rho_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta))$

$$(f \circ \rho_{\text{kug}})(r, \vartheta, \varphi) = f(r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta)) = \frac{r^2 \cos(\vartheta)^2}{r^6} = \frac{\cos(\vartheta)^2}{r^4}.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_R f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_B \frac{\cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)}{r^2} d(r, \vartheta, \varphi) = \int_1^2 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)}{r^2} d\varphi \right) d\vartheta \right) dr \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\int_0^\pi \frac{\cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)}{r^2} d\vartheta \right) dr = -2\pi \int_1^2 r^{-2} \left(\int_0^\pi \cos(\vartheta)^2 (-\sin(\vartheta)) d\vartheta \right) dr \\
&= -\frac{2}{3}\pi \int_1^2 r^{-2} [\cos(\vartheta)^3]_0^\pi dr = -\frac{2}{3}\pi \int_1^2 r^{-2} [(-1)^3 - 1^3] dr = \frac{4}{3}\pi \int_1^2 r^{-2} dr \\
&= -\frac{4}{3}\pi [r^{-1}]_1^2 = -\frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Auf Grund des Additionstheorems der Kosinusfunktion gilt $\cos(t) = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t) = \cos(\frac{1}{2}t)^2 - \sin(\frac{1}{2}t)^2 = 1 - \sin(\frac{1}{2}t)^2 - \sin(\frac{1}{2}t)^2 = 1 - 2\sin(\frac{1}{2}t)^2$, was zu $2\sin(t/2)^2 = 1 - \cos(t)$ umgeformt werden kann. Nun gilt für alle $t \in]0, 2\pi[$ jeweils $\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$ und somit $\|\gamma'(t)\|_2^2 = (1 - \cos(t))^2 + \sin(t)^2 = 1 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 2 - 2\cos(t) = 2(1 - \cos(t))$, also $\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(t)}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma|_{[0, 2\pi]}) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(\frac{1}{2}t) dt \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}t) dt = 4 \int_0^\pi \sin(t) dt = 4 [-\cos(t)]_0^\pi \\
&= 4(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4 \cdot 2 = 8.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) Wäre $F = \nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$ für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann wäre diese Funktion F sogar beliebig oft differenzierbar (weil dies auf F zutrifft). Nach dem Satz von Schwarz müsste dann

$$\partial_3 F_1 = \partial_{31} f = \partial_{13} f = \partial_1 F_3$$

gelten. Tatsächlich aber gilt $\partial_3 F_1(x, y, z) = -6xz^2$ und $\partial_1 F_3(x, y, z) = 0$.

zu (b) Die Überlegung in Teil (a) zeigt, dass wir g so wählen müssen, dass $\partial_3(gF_1) = \partial_1(gF_3)$ erfüllt ist. Auf Grund der Annahme $\partial_3 g = 0$ ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\partial_3 F_1 = (\partial_1 g)F_3 + g(\partial_1 F_3) \Leftrightarrow -6xz^2g = (\partial_1 g)3z^2.$$

Ebenso muss gelten

$$\partial_3(gF_2) = \partial_2(gF_3) \Leftrightarrow \partial_3 F_2 = (\partial_2 g)F_3 + g(\partial_2 F_3) \Leftrightarrow -6zy^2g = (\partial_2 g)3z^2.$$

Gesucht wird also eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_1 g = -2xg$ und $\partial_2 g = -2yg$. Offenbar hat die Funktion $g(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ diese Eigenschaft. Tatsächlich ist gF mit dieser Funktion g ein Gradientenvektorfeld. Definieren wir nämlich $f(x, y, z) = z^3 e^{-x^2 - y^2}$, dann gilt

$$(\nabla f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_1(z^3 e^{-x^2 - y^2}) \\ \partial_2(z^3 e^{-x^2 - y^2}) \\ \partial_3(z^3 e^{-x^2 - y^2}) \end{pmatrix} = e^{-x^2 - y^2} \begin{pmatrix} -2xz^3 \\ -2yz^3 \\ 3z^2 \end{pmatrix} = g(x, y, z)F(x, y, z).$$

zu (c) Nach Definition der Kurvenintegrale 2. Art gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \langle F, ds \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle F(a \cos(t), b \sin(t), 1), \gamma'(t) \rangle dt = \\
 &\int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2a \cos(t) \\ -2b \sin(t) \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\
 &\int_0^{2\pi} (2a^2 \sin(t) \cos(t) - 2b^2 \sin(t) \cos(t)) dt = \\
 2(a^2 - b^2) \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt &= (a^2 - b^2) [\sin(t)^2]_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$