Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 1 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Im Beweis von Prop. 3.3 wurde gezeigt, dass $v^-(A)$ mit dem Unterintegral und $v^+(A)$ mit dem Oberintegral von χ_A übereinstimmt, gebildet über einen beliebigen kompakten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $Q^\circ \supseteq A$. Die Ungleichung folgt somit aus der bereits bekannten Ungleichung zwischen Unter- und Oberintegral, nämlich

$$v^-(A) \quad = \quad \int_{Q\bigstar} \chi_A(x)\,dx \quad \leq \quad \int^{Q\bigstar} \chi_A(x)\,dx \quad = \quad v^+(A).$$

Setzt man das Ergebnis aus Teil (b), die Messbarkeit kompakter Quader, als bekannt voraus, dann gibt es noch eine weitere Möglichkeit, die Ungleichung zu begründen. Denn dann sind auch beliebige endliche Vereinigungen solcher Quader Jordan-messbar. Seien nun $P_1, ..., P_r \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunkte kompakte Quader, die in A enthalten sind, und $Q_1, ..., Q_s \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Quader mit $\bigcup_{j=1}^s Q_j \supseteq A$. Aus der Monotonie des Jordan-Volumens und $\bigcup_{i=1}^r P_i \subseteq A \supseteq \bigcup_{j=1}^s Q_j$ folgt

$$\sum_{i=1}^r v(P_i) \quad = \quad v\left(\bigcup_{i=1}^r P_i\right) \quad \leq \quad v\left(\bigcup_{j=1}^s Q_j\right) \quad \leq \quad \sum_{j=1}^s v(Q_j).$$

Dies zeigt, dass $\sum_{i=1}^r v(P_i)$ eine untere Schranke für alle Summen der Form $\sum_{j=1}^s v(Q_j)$ ist, gebildet mit kompakten Quadern Q_j, deren Vereingung A enthält. Weil $v^+(A)$ nach Definition das Infimum der Menge dieser Summen ist, folgt $\sum_{i=1}^r v(P_i) \leq v^+(A)$. Dies wiederum zeigt, dass $v^+(A)$ ein obere Schranke für alle Summen der Form $\sum_{i=1}^r v(P_i)$ ist, gebildet mit disjunkten kompakten Quadern P_i, die alle in A enthalten sind. Weil $v^-(A)$ nach Definition das Supremum der Menge dieser Summen ist, folgt $v^-(A) \leq v^+(A)$.

zu (b) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader. Wegen $Q \supseteq Q$ folgt $v^+(Q) \leq v(Q)$ nach Definition des äußeren Volumens (wobei $v(Q)$ das Volumen im Sinne der ursprünglichen Definition bezeichnet). Gleichzeitig folgt aus der Inklusion $Q \subseteq Q$ aber auch $v(Q) \leq v^-(Q)$. Setzt man $v^-(Q) \leq v^+(Q)$ als bekannt voraus, dann erhält man $v(Q) = v^-(Q) \leq v^+(Q) = v(Q)$, und es folgt $v^-(Q) = v^+(Q)$, also die Jordan-Messbarkeit von Q.

Sei nun $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offener Quader. Bezeichnet $\bar{P}$ den Abschluss von P, dann ist $\bar{P}$ kompakt, und aus $\bar{P} \supseteq P$ folgt die Ungleichung $v^+(P) \leq v(\bar{P})$. Schreiben wir $\bar{P}$ in der Form $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, dann ist der kompakte Quader $P_\delta = \prod_{i=1}^n [a_i + \delta, b_i - \delta]$ für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\delta < \frac{1}{2}\min\{b_i - a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ in P enthalten, und es folgt $v(P_\delta) \leq v^-(P)$. Setzen wir $P_0 = \bar{P}$, dann ist die Funktion $\delta \mapsto v(P_\delta)$ (als Polynomausdruck in δ) offenbar stetig im Nullpunkt. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es also ein δ mit $v(P_\delta) > v(\bar{P}) - \varepsilon$. Es folgt $v(\bar{P}) - \varepsilon \leq v(P_\delta) \leq v^-(P) \leq v^+(P) \leq v(\bar{P})$, und daraus wiederum folgt $v^-(P) = v^+(P)$, also die Jordan-Messbarkeit von P.

Möchte man die Verwendung der Ungleichung $v^-(Q) \leq v^+(Q)$ bzw. $v^-(P) \leq v^+(P)$ vermeiden (was notwendig ist, wenn man mit der 2. Variante von Teil (a) nicht in einen Zirkelschluss geraten will), dann gibt es noch eine weitere Möglichkeit: Man überprüft direkt, dass der Rand von Q bzw. P eine Nullmenge ist, und wendet Folgerung 3.5 an.

zu (c) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Für $x \notin [-1,1]$ gilt $x^2+y^2 > 1$ und somit $(x,y,z) \notin Z$. Es folgt $Z(x)_1 = \varnothing$ für diese x. Ansonsten gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} (y,z) \in Z(x)_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in Z \quad \Leftrightarrow \quad z \in [0,1] \wedge x^2+y^2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \in [0,1] \wedge |y| \le \sqrt{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad (y,z) \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \times [0,1] \quad , \end{aligned}$$

also $Z(x)_1 = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \times [0,1]$.

zu (d) Die erste Möglichkeit besteht darin, direkt mit der Definition von $v(Z)$ zu arbeiten: Es ist $v(Z) = \int_Q \chi_Z(x)\,dx$, wobei Q einen beliebigen kompakten Quader mit $Q^\circ \supseteq Z$ und $\chi_Z : Q \to \{0,1\}$ die charakteristische Funktion von Z bezeichnet. Die zweite Möglichkeit wäre, Z als Ordinatenmenge einer Funktion $f : K \to \mathbb{R}_+$ darzustellen, nämlich durch die Funktion mit dem konstanten Wert 1 auf dem Einheitskreis $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Nach Satz (3.18) gilt $v(Z) = \int_K f(x,y)\,d(x,y)$. Die dritte Möglichkeit schließlich ist die Anwendung des Cavalierischen Prinzips auf das Ergbnis aus Teil (c): Es ist

$$v(Z) \quad = \quad \int_{-1}^{1} v_2(Z(x)_1)\,dx \quad = \quad \int_{-1}^{1} 2 \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot 1\,dx \quad = \quad 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \quad = \quad \pi.$$

Aufgabe 1

zu (a) Die Menge A ist gegeben durch $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\,,\, y \ge 0\}$. Setzen wir $Q = [-3,3]\times[-3,3]$, dann ist A in $Q^\circ = \,]-3,3[\, \times \,]-3,3[$ enthalten, denn für alle $(x,y) \in A$ gilt $x^2+y^2 \le 2$ und somit insbesondere $|x| < 3$ und $|y| < 3$, also $-3 < x,y < 3$. Bezeichnet f_Q die Nullfortsetzung der Funktion $(x,y) \mapsto x^2y$, dann ist $y \mapsto f_Q(x,y)$ konstant null, falls $x < -2$ oder $x > 2$ ist, ansonsten gegeben durch $f_Q(x,y) = x^2y$ für $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ und ansonsten null. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_A x^2y\,d(x,y) \quad &= \quad \int_Q f_Q(x,y)\,d(x,y) \quad = \quad \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\,dy\right)dx \quad = \quad \int_{-2}^{2} x^2\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\right)dx \\ &= \quad \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,\left[y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4x^2-x^4\right)dx \\ &= \quad \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(\tfrac{4}{3}\cdot 8 - \tfrac{1}{5}\cdot 32) \quad = \quad \tfrac{64}{15}. \end{aligned}$$

zu (b) Das Dreieck B mit den drei angegebenen Eckpunkten hat die Form $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\,,\, 0 \le y \le 1-x\}$, und der Quader $Q = [-1,2]\times[-1,2]$ enthält B in seinem Inneren, denn für alle $(x,y) \in B$ gilt $-1 < 0 \le x \le 1 < 2$ und ebenso $-1 < 0 \le y \le 1 < 2$. Bezeichnet f_Q die Nullfortsetzung von $B \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y^2$ so ist $y \mapsto f_Q(x,y)$ für $x < 0$ und $x > 1$ konstant null und ansonsten gegeben durch $y \mapsto x+y^2$ für $0 \le y \le 1-x$ und null für $y < 0$ oder $y > 1-x$. Wir erhalten

$$\int_B (x+y^2)\,d(x,y) \quad = \quad \int_Q f_Q(x,y)\,d(x,y) \quad = \quad \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x+y^2)\,dy\right)dx \quad =$$

$$\int_0^1 \left[xy+\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}\,dx \quad = \quad \int_0^1\left(x(1-x)+\tfrac{1}{3}(1-x)^3\right)dx \quad = \quad \int_0^1\left(x-x^2+\tfrac{1}{3}-x+x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right)dx \quad =$$

$$\tfrac{1}{3}\int_0^1(1-x^3)\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{3}\left[x-\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4} \quad = \quad \tfrac{1}{4}.$$

Aufgabe 2

zu (a) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig vorgegeben. Im Fall $x < a$ oder $x > b$ gilt $(x,y,z) \notin R(f)$. Dies zeigt, dass in diesem Fall $R(f)(x)_1 = \varnothing$ ist. Im Fall $x \in [a,b]$ gilt die Äquivalenz

$$(y,z) \in R(f)(x)_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in R(f) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + z^2 \leq f(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (y,z) \in \bar{B}_{f(x)} \quad ,$$

wobei $\bar{B}_{f(x)} \subseteq \mathbb{R}^2$ im Fall $f(x) > 0$ den abgeschlossenen Ball vom Radius $f(x)$ um den Nullpunkt bezeichnet, und im Fall $f(x) = 0$ die Menge $\{(0,0)\}$. Es gilt also $R(f)(x)_1 = \bar{B}_{f(x)}$ für alle $x \in [a,b]$. Für alle $r \in \mathbb{R}_+$ gilt $v_2(\bar{B}_r) = \pi r^2$. Mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips erhalten wir also

$$v_3(R(f)) \quad = \quad \int_a^b v_2(R(f)(x)_1)\,dx \quad = \quad \int_a^b v_2(\bar{B}_{f(x)})\,dx \quad = \quad \int_a^b \pi f(x)^2\,dx \quad = \quad \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

zu (b) Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Dann stimmt das Ellipsoid E mit dem Rotationskörper $R(f)$ überein. Denn für alle $(x,y,z) \in E$ folgt aus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1$ die Ungleichung $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ und somit $|x| \leq a$, also $x \in [-a,a]$, und für alle (x,y,z) mit $x \in [-a,a]$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + z^2 \leq b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad y^2 + z^2 \leq f(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in R(f).\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Aufgabenteil (a) erhalten wir also

$$\begin{aligned}v_3(E) \quad &= \quad v_3(R(f)) \quad = \quad \pi \int_{-a}^a f(x)^2\,dx \quad = \quad \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)dx \quad = \quad \pi a b^2 \int_{-a}^a \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)dx \\ &= \quad \pi a b^2 \int_{-1}^1 (1 - x^2)\,dx \quad = \quad \pi a b^2 \left[x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 \quad = \quad \pi a b^2 \cdot 2 \cdot \tfrac{2}{3} \quad = \quad \tfrac{4}{3}\pi a b^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition der Jordan-Messbarkeit und des inneren Volumens existieren disjunkte kompakte Quader $P_1, ..., P_r \subseteq A$ mit $\sum_{i=1}^r v(P_i) > v(A) - \varepsilon$. Diese Quader sind erst recht in $\bar{A}$ enthalten; daraus folgt $v^-(\bar{A}) \geq \sum_{i=1}^r v(P_i) > v(A) - \varepsilon$. Ebenso existieren auf Grund der Definition der Jordan-Messbarkeit und des äußeren Volumens kompakte Quader $Q_1, ..., Q_s \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{j=1}^s Q_j \supseteq A$ und $\sum_{j=1}^s v(Q_j) < v(A) + \varepsilon$. Weil die Menge $\bigcup_{j=1}^s Q_j$ abgeschlossen ist, gilt auch $\bigcup_{j=1}^s Q_j \supseteq \bar{A}$. Damit erhalten wir $v^+(\bar{A}) \leq \sum_{j=1}^s Q_j < v(A) + \varepsilon$. Insgesamt haben wir damt $v(A) - \varepsilon < v^-(\bar{A}) \leq v^+(\bar{A}) < v(A) + \varepsilon$ nachgewiesen. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $v^-(\bar{A}) = v^+(\bar{A}) = v(A)$. Also ist $\bar{A}$ Jordan-messbar, und $v(A)$ ist das Jordan-Volumen.

zu (b) Zu zeigen ist $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$. „$\subseteq$“ Sei $(x,y) \in \partial(A \times B)$. Wir zeigen zunächst, dass $x \in \bar{A}$ und $y \in \bar{B}$ gilt. Sei M eine offene Umgebung von x im $\mathbb{R}^m$ und N eine offene Umgebung von y im $\mathbb{R}^n$. Dann ist laut Angabe $M \times N$ eine offene Umgebung von (x,y), und wegen $(x,y) \in \partial(A \times B)$ gibt es einen Punkt $(x_1, y_1) \in (M \times N) \cap (A \times B)$. Es gilt dann $x_1 \in M \cap A$ und $y_1 \in N \cap B$. Dies zeigt, dass jede offene Umgebung von x einen Punkt aus A und jede offene Umgebung von y einen Punkt aus B enthält. Damit ist $x \in \bar{A}$ und $y \in \bar{B}$ nachgewiesen.

Nehmen wir nun an, dass (x,y) weder in $\partial A \times \bar{B}$ noch in $\bar{A} \times \partial B$ liegt. Dann gilt $x \notin \partial A$, und wegen $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ folgt $x \in A^\circ$. Ebenso erhält man $y \in B^\circ$. Insgesamt ist dann $A^\circ \times B^\circ$ eine offene Umgebung von (x,y), die in $A \times B$ enthalten ist. Dies zeigt, dass (x,y) im Inneren von $A \times B$ liegt, im Widerspruch zu $(x,y) \in \partial(A \times B)$. Es muss also $(x,y) \in \partial A \times \bar{B}$ oder $(x,y) \in \bar{A} \times \partial B$ gelten.

„$\supseteq$" Es genügt zu zeigen, dass aus $(x, y) \in \partial A \times \bar{B}$ folgt, dass (x, y) in $\partial(A \times B)$ liegt, denn im Fall $(x, y) \in \bar{A} \times \partial B$ verläuft die Argumentation vollkommen analog. Sei U eine offene Umgebung von (x, y). Dann gibt es laut Angabe eine offene Umgebung M von x und eine offene Umgebung N von y mit $M \times N \subseteq U$. Wegen $y \in \bar{B}$ existiert ein $y_1 \in N \cap B$, und ebenso existiert wegen $x \in \partial A$ ein $x_1 \in M \cap A$. Insgesamt ist dann (x_1, y_1) ein Punkt in $A \times B$, der auch in der offenen Umgebung U von (x, y) enthalten ist. Wegen $x \in \partial A$ existiert aber auch ein $x_2 \in M$ mit $x_2 \notin A$. Es ist dann (x_2, y_1) ein Punkt in U mit $(x_2, y_1) \notin A \times B$.