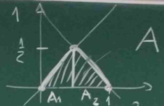
Globalübungsblatt 1



Aufgabe 1

zu (a) $\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y)$, wobei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Es ist $A = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\frac{1}{2}],\ 0 \leq y \leq x\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\frac{1}{2},1],\ 0 \leq y \leq 1-x\}$

Dabei schneiden sich A_1 und A_2 nur in der Jordanschen Nullmenge $N = \{\frac{1}{2}\} \times [0,\frac{1}{2}]$. $\to \int_A (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int_{A_1} (x^2+y^2)\,d(x,y) + \int_{A_2} (x^2+y^2)\,d(x,y)$

$\int_{A_1} (x^2+y^2)\,d(x,y) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (x^2+y^2)\,dy \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right]_0^x dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 + \frac{1}{3}x^3\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}x^3\, dx = \left[\frac{1}{3}x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}$$

$$\int_{A_2} (x^2+y^2)\, d(x,y) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\, d(x,y) \right) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\cancel{x^2} - \cancel{x^3} + \cancel{\frac{1}{3}} - x + \cancel{x^2} - \cancel{\frac{1}{3}x^3}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

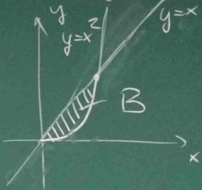
$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{48} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{48}(-16 + 32 - 24 + 16 + 1 - 4 + 6 - 8) = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \int_A (x^2+y^2)\, d(x,y) = \frac{1}{48} + \frac{1}{16} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

zu (b) $\int_B xy \, d(x,y)$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Teilmenge im I Quadranten begrenzt durch

$y = x$ und $y = x^2$



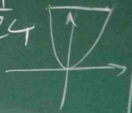
Die beiden Funktionsgraphen schneiden sich in den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$. Für $0 \le x \le 1$ gilt $0 \le x^2 \le x$. Die gesuchte Menge B ist also $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ x^2 \le y \le x\}$

$$\int_B xy \, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy \, dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x y^2\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^5\right) dx$$

Ist z
zwei
(x,y)
x^2+y
$\overline{B}_0 =$
r fal
$\Rightarrow V_2$
Cavalieri
$\int_0^h V_2(A$

$$= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$



Aufgabe 2

zu (a) Laut Angabe wird das elliptische Paraboloid nach oben begrenzt durch die Ebene mit der Gleichung $z = h$ und nach unten durch die Fläche mit der Gleichung $z = x^2 + y^2$ (die dadurch entsteht, dass man die Standard-Parabel in der xz-Ebene um die z-Achse rotieren lässt). Die gesuchte Menge ist somit gegeben durch

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq h\}.$$

Wir bestimmen die Querschnitte entlang der z-Achse. Ist $z \notin [0, h]$, dann gilt $A(z)_3 = \varnothing$, denn es ist $(x, y) \in A(z)_3$ nur dann, wenn $(x, y, z) \in H$ gilt, woraus insbesondere $0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq h$ und somit $z \in [0, h]$ folgt.

Ist $z \in [0,h]$, dann gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ jeweils die Äquivalenz

$$(x,y) \in A(z)_3 \iff (x,y,z) \in A \iff$$

$$x^2+y^2 \leq z \iff (x,y) \in \bar{B}_{\sqrt{z}}$$, wobei

$\bar{B}_0 = \{(0,0)\}$, $\bar{B}_r$ = abg. Kreisscheibe vom Radius r falls $r \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow v_2(A(z)_3) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z \notin [0,h] \\ \pi z & \text{falls } z \in [0,h] \end{cases}$$

Cavalierisches Prinzip $\Rightarrow v_3(A) =$

$$\int_0^h v_2(A(z))\,dz = \int_0^h \pi z\,dz = \frac{1}{2}\pi h^2$$

zu (b) einschaliges Hyperboloid
begrenzt durch $z=0$, $z=h$ und die
Fläche $x^2+y^2-z^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1+z^2$

Die Menge ist geg. durch

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in[0,h],\ x^2+y^2\le 1+z^2\}$$

Genau wie in Teil (a) überprüft man

$$B(z)_3 = \begin{cases}\emptyset & \text{falls } z\notin[0,h]\\ \overline{B}_{\sqrt{1+z^2}} & \text{falls } z\in[0,h]\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2(B(z)_3) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z\notin[0,h]\\ \pi(1+z^2) & \text{falls } z\in[0,h]\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_3(B) = \int_0^h v_2\left(B(z)_3\right) dz = \int_0^h \pi(1+z^2)\, dz$$

$$= \pi \left[z + \tfrac{1}{3} z^3\right]_0^h = \pi\left(h + \tfrac{1}{3} h^3\right)$$

<u>zu (c)</u> zweischaliges Hyperboloid

begrenzt durch $x^2+y^2-z^2=-1 \iff x^2+y^2 = z^2-1$

$\iff z = \sqrt{x^2+y^2+1}$

und $z=h$, wobei $h>1$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2+1} \leq z \leq h\}$$

Bestimmung von $B(z)_3$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

$$B(z)_3 = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } z \notin [1,h] \\ \overline{B}_{\sqrt{z^2-1}} & \text{falls } z \in [1,h] \end{cases}$$

und $z = h$, wobei $h > 1$ $\quad z = \sqrt{x^2+y^2+1}$

Sei $z \in [1,h]$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in B(z)_3 \iff (x,y,z) \in B \iff \sqrt{x^2+y^2+1} \le z$$

$$\iff x^2+y^2 \le z^2-1 \iff (x,y) \in \overline{B}_{\sqrt{z^2-1}}$$

$$\Rightarrow v_2(B(z)_3) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z \notin [1,h] \\ \pi(z^2-1) & \text{falls } z \in [1,h] \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_3(B) = \int_1^h \pi(z^2-1)\,dz = \pi\left[\tfrac{1}{3}z^3 - z\right]_1^h =$$

$$\pi\left(\tfrac{1}{3}h^3 - h - \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{1}{3}\pi\left(h^3 - 3h + 2\right)$$

$$= v_n(B) \; v_m(A)$$

Aufgabe 3 geg: $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar

z.zg: $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ Jordan-messb. und

$$v_{m+n}(A \times B) = v_m(A)\, v_n(B)$$

Tut.-Blatt, Aufg. 3 $\Rightarrow \partial(A \times B) \subseteq (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$

Da A, B Jordan-messbar sind, sind $\partial A, \partial B$ Nullmengen. Lt. VL folgt daraus, dass auch $\partial A \times \bar{B}$, $\bar{A} \times \partial B$ Nullmengen im $\mathbb{R}^{m+n}$ sind, damit auch die Vereinigung.

$\Rightarrow \partial(A \times B)$ ist Nullmenge, außerdem beschränkt als kart. Produkt beschränkter Mengen $\Rightarrow$ $A \times B$ ist Jordan-messbar

$\Rightarrow \partial(A\times B) \subseteq (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$

Da A, B Jordan-messbar sind, sind $\partial A, \partial B$ Null-

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^m$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader mit $P^\circ \supseteq A$, $Q^\circ \supseteq B$, und seien $\chi_A : P \to \{0,1\}$, $\chi_B : Q \to \{0,1\}$ die zugeh. char. Fkt. Beh.: Die char. Fkt. $\chi_{A\times B}$: $P \times Q \to \{0,1\}$ ist geg. durch $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$

Es genügt z.zg. $\chi_{A\times B}(x,y) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(x)\chi_B(y) = 1$ $\forall (x,y) \in P \times Q$. Sei also $(x,y) \in P \times Q$

$\chi_{A\times B}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

$\Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(y) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(x)\chi_B(y) = 1$

$\Rightarrow v_{m+n}(A\times B) = \int_{P\times Q} \chi_A(x,y)\, d(x,y) = \int_P \left(\int_Q \chi_A(x)\chi_B(y)\, dy\right) dx$

$\int_P \chi_A(x) \left(\int_Q \chi_B(y)\, dy\right) dx = \int_P \chi_A(x)\, v_n(B)\, dx = v_n(B) \int_P \chi_A(x)\, dx$

$= v_n(B)\, v_m(A)$

Die Gleichung $v_{m+n}(A \times B) = v_m(A) v_n(B)$ lässt sich alternativ auch folgendermaßen beweisen: Auf Grund der Jordan-Messbarkeit von A gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endliche Menge disjunkter kompakter Quader $P_1, ..., P_r \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\bigcup_{i=1}^r P_i \subseteq A$ und $\sum_{i=1}^r v_m(P_i) > v_-(A) - \varepsilon = v(A) - \varepsilon$. Ebenso gibt es kompakte disjunkte Quader $Q_1, ..., Q_s \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{j=1}^s Q_j \subseteq B$ und $\sum_{i=1}^r v_n(Q_j) > v(B) - \varepsilon$.

Auch die Quader $P_i \times Q_j$ mit $i \in \{1, ..., r\}$ und $j \in \{1, ..., s\}$ sind paarweise disjunkt. Ist nämlich (x, y) ein gemeinsamer Punkt in $P_i \times Q_j$ und $P_{i'} \times Q_{j'}$, dann folgt $x \in P_i \cap P_{i'}$ und somit $i = i'$. Ebenso erhält man $y \in Q_j \cap Q_{j'}$ und somit $j = j'$. Es ist auch leicht zu sehen, dass

$$\bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} P_i \times Q_j \quad \subseteq \quad A \times B$$

erfüllt ist.

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} v_{m+n}(P_i \times Q_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} v_m(P_i)v_n(Q_j) \quad =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} v_m(P_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{s} v_n(Q_j)\right) > (v_m(A)-\varepsilon)(v_n(B)-\varepsilon).$$

Dies zeigt, dass auch $v_{m+n}(A \times B) > (v_m(A)-\varepsilon)(v_n(B)-\varepsilon)$ gelten muss. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $v_{m+n}(A \times B) \geq v_m(A)v_n(B)$. Durch die geeignete Wahl von Quadern, die A und B überdecken, beweist man auf ähnliche Weise die Ungleichung $v_{m+n}(A \times B) \leq v_m(A)v_n(B)$.