Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Geben Sie ein mögliches einfaches Beispiel für die Berechnung eines komplexen Kurvenintegrals mit Hilfe des Residuensatzes an. Das Kurvenintegral soll dabei aber nicht gleich null sein, und die Funktion sollte mehr als eine Singularität haben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y''' = f(x, y, y', y'')$. Wie ist eine Lösung dieser DGL dritter Ordnung definiert?

(c) Wie übersetzt man die DGL aus Teil (a) in ein System $y' = F(x, y)$ erster Ordnung, d.h. was ist der Definitionsbereich dieses Systems, und wie definiert man die Funktion F? Wie hängen die Lösungen der DGL aus Teil (a) mit den Lösungen des Systems zusammen?

(d) Welche Form muss eine DGL haben, damit die Trennung der Variablen durchgeführt werden kann? Welche Schritte sind im Einzelnen auszuführen?

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos(t)}\, dt.$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Gleichung $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos(t)}\, dt = \int_{\partial B_1(0)} \frac{(-i)}{5z + \frac{3}{2}(z^2+1)}\, dz$.

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende DGL 1. Ordnung mit Definitionsbereich D. Bestimmen Sie für jeden Punkt $(a, b) \in D$ eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von (a, b) mit $\varphi(a) = b$ durch Trennung der Variablen. Dabei braucht das Definitonsintervall I nicht explizit angegeben werden.

(a) $D = \mathbb{R}^2$, $y' = (x^2 + r^2)(y^2 + s^2)$ mit $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) $D = \mathbb{R}^+ \times \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 1\}$, $y' = \dfrac{1 - y^2}{x}$

Aufgabe 3

In der Physik wird der sogenannte *freie Fall* durch die Differentialgleichung (*) $y'' = -g$ mit der Erdbeschleunigungskonstante $g \in \mathbb{R}^+$ beschrieben.

(a) Geben Sie die Ordnung n, den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ der DGL sowie die zur DGL (*) gehörende Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an.

(b) Bestimmen Sie das zu (*) äquivalente System aus n Differentialgleichungen 1. Ordnung.

(c) Seien $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ des Systems aus Teil (b), $\varphi = (\varphi_0, ..., \varphi_{n-1})$ mit $\varphi_0(0) = x_0$ und $\varphi_1(0) = v_0$. Geben Sie auch die zu φ korrespondierende Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ der DGL (*) an.

Dieses Blatt wird vom 18. bis zum 21. Juli 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 12 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Residuensatzes für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2}\, dx \quad = \quad \frac{\pi}{ae^a}.$$

Hinweis: Es gilt $\mathrm{Re}(\frac{e^{ix}}{a^2+x^2}) = \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (3+4+3 Punkte)

Bestimmen Sie alle maximalen Lösungen der folgenden DGL.

(a) $y' = \dfrac{y+1}{x+2} + \exp\left(\dfrac{y+1}{x+2}\right)$

(b) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+y+2}$

(c) $y' = (x-y+3)^2$

Aufgabe 3 (2+1+4+3 Punkte)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall $f : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die DGL zweiter Ordnung $y'' = f(y)$ mit dem Definitionsbereich $D = J \times \mathbb{R}$. Sei $(a, b) \in D$.

(a) Sei $u : J \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(y) = -\int_a^y f(\eta)\, d\eta$. Zeigen Sie: Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung unserer DGL, dann ist $t \mapsto \frac{1}{2} y'(t)^2 + u(y(t))$ eine konstante Funktion auf I.

(b) Sei $E \in \mathbb{R}$. Formen Sie die DGL $\frac{1}{2}(y')^2 + u(y) = E$ so um, dass eine Lösung durch Trennung der Variablen möglich wird.

(c) Zeigen Sie, dass in den folgenden Fällen eine eindeutige Lösung der DGL $y'' = f(y)$ existiert:
(i) $b \neq 0$ (ii) $b = 0$, $f(a) \neq 0$.
Hinweis: Verwenden Sie *nicht* Satz 1.10, sondern die Ergebnisse von Teil (a) und (b).

(d) Seien $v, k \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung der DGL $y'' = -ky$ durch den Punkt $(a, b) = (0, v)$.

Abgabe: Dienstag, 26. Juli 2022, 14:15 Uhr