

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL**— Blatt 6 —**

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (zur Vorbereitung)

- (a) Bei welchen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie geht es um die Vertauschbarkeit von Integration mit Grenzübergängen, und was sagen diese aus?
- (b) Geben Sie ein oder zwei konkrete Beispiele an, die zeigen, dass die entsprechenden Sätze für das Riemann-Integral nicht gültig sind.
- (c) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ und $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ beliebige Funktionen. Was bedeutet die Gleichung $F' = f$ in dieser Situation?
- (d) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg in $\mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wie ist das komplexe Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ definiert?

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergieren.
- (b) Seien $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die beiden Funktionen gegeben durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ und $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Stellen Sie den Wert $f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe bekannter Funktionen dar und begründen Sie, dass f auf jeden endlichen Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ Lebesgue-integrierbar ist.
- (c) Zeigen Sie mit dem Satz über die monotone Konvergenz, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die beiden Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2 - 5z + 7$ und $F(z) = \frac{1}{3}z^3 - \frac{5}{2}z^2 + 7z$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Summen- und die Produktregel der Differentialrechnung in einer Variablen auch für $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen gültig sind.
- (b) Beweisen Sie für alle $p, q \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\int_p^q f(z) dz = F(q) - F(p) \quad ,$$

wobei der Ausdruck links das komplexe Wegintegral der Funktion f entlang der Verbindungsstrecke $[p, q]$ in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Dieses Blatt wird vom 8. und 9. Juni im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 6 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
- (b) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihenentwicklung von f an (mit Nachweis).
- (c) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe F mit folgender Eigenschaft an: Das Lebesgue-Integral von f auf jedem endlichen Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist gegeben durch $F(b) - F(a)$. Weisen Sie diese Eigenschaft nach mit Hilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz.

Aufgabe 2 (3+2+2+3 Punkte)

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx.$$

Beweisen Sie die Gleichungen

- (a) Beweisen Sie die Gleichung $f' + g' = 0$ mit der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation.
- (b) Beweisen Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass $f + g$ auf ganz $\mathbb{R}$ den konstanten Wert $\frac{1}{4}\pi$ besitzt.
- (c) Beweisen Sie die Gleichung $\lim_n g(n) = 0$ mit Hilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz.
- (d) Beweisen Sie durch Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Gleichung $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

(Der Wert des Fehlerintegrals lässt sich also auch durch eine Rechnung im Eindimensionalen bestimmen.)

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ eine Polynomfunktion mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, außerdem $r \in \mathbb{R}^+$ und $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = re^{it}$. Verifizieren Sie die beiden Gleichungen

$$\int_{\gamma_r} p(z) dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_r} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(0)}.$$

Abgabe: Dienstag, 14. Juni 2022, 14:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.