Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Geben Sie ein äußeres Einheitsnormalenfeld auf dem Rand des Halbkreises $H \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert durch $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ y \geq 0\}$ an.

(b) Sei $S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0, 1]\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x + y + z$. Berechnen Sie das Flächenintegral 1. Art $\int_{(S,\phi)} f\, dA$ für eine geeignete Parametrisierung ϕ.

(c) Geben Sie die Definition des Gradienten $\nabla(f)$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ und die Definition der Divergenz $\operatorname{div}(F)$ eines differenzierbaren Vektorfeldes $F : U \to \mathbb{R}^n$ an, wobei U eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(d) Beweisen Sie die Rechenregel $\operatorname{div}(f \cdot F) = \langle \nabla(f), F\rangle + f \cdot \operatorname{div}(F)$.

Aufgabe 1

Sei $Q = [0, 1]^3$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x, y, z) = (x^2yz, y^2zx, z^2xy)$.

(a) Geben Sie ein äußeres Einheitsnormalenfeld auf ∂Q an.

(b) Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für Quader, indem Sie die Integrale $\int_Q \operatorname{div}(F)(x, y, z)\, d(x, y, z)$ und $\int_{(\partial Q,\nu)} \langle F, dA\rangle$ einzeln berechnen und miteinander vergleichen.

Aufgabe 2

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetig differenzierbare Funktion und $S(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ die *Rotationsfläche*

$$S(f) \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\ ,\ y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Zeigen Sie, dass der Inhalt von $S(f)$ durch das Integral $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ gegeben ist.

(b) Berechnen Sie für beliebiges $h \in \mathbb{R}^+$ den Inhalt der Oberfläche des *elliptischen Paraboloids*

$$E \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, h]\ ,\ z = x^2 + y^2\}.$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\ ,\ x^2 \leq y \leq 4\}$ ein Normalbereich sowohl bezüglich der x-Achse als auch bezüglich der y-Achse ist, indem Sie jeweils geeignete Begrenzungsfunktionen φ und ψ angeben.

(b) Geben Sie eine Randkurve γ für B an. (Auf den Nachweis der Eigenschaften einer Randkurve kann aus Zeitgründen verzichtet werden.)

(c) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld definiert durch $F(x, y) = (x + e^y, y + \sin(x))$. Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art $\int_\gamma \langle F, ds\rangle$ mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes der Ebene.

Dieses Blatt wird vom 23. bis zum 26. Mai 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Blatt 4** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die Fläche gegeben durch

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 8 - (x^2+y^2)^{3/2} \ , \ x^2+y^2 \leq 4\}$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x,y,z) = (y^3, 0, 0)$. Finden Sie eine parametrisierte $\mathcal{C}^1$-Fläche (B,ϕ) mit $\phi(B) = S$, und berechnen Sie $\int_{(B,\phi)} \langle \mathrm{rot}(F), dA \rangle$ durch Anwendung des Stokeschen Integralsatzes.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die beiden unbestimmten Integrale $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ und $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ durch Anwendung der Substitutionsregel und durch partielle Integration.

(b) Überprüfen Sie, dass für jedes $h \in \mathbb{R}^+$ der Inhalt der Oberfläche des einschaligen Hyperboloids

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [0,h] \ , \ x^2+y^2 = z^2+1\}$$

(vgl. Aufg. 2 vom Globalübungsblatt 2) durch $\pi(h\sqrt{2h^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}h + \sqrt{2h^2+1}))$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie ebenso, dass für jedes $h \in \mathbb{R}$ mit $h > 1$ der Inhalt der Oberfläche des zweischaligen Hyperboloids

$$H' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [1,h] \ , \ x^2+y^2 = z^2-1\}.$$

durch $\pi(h\sqrt{2h^2-1} - \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}h + \sqrt{2h^2-1})) - c$ gegeben ist, mit einer von h unabhängigen Konstante c.

Aufgabe 3 (3+1+1+5 Punkte)

Der *Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik* besagt, dass der *elektrische Fluss* durch eine geschlossene Fläche mit der Ladung übereinstimmt, die von der Fläche eingeschlossen wird. Dabei erhält man den elektrischen Fluss als Flächenintegral 2. Art über die *elektrische Flussdichte* D, die wiederum mit der elektrischen Feldstärke E durch $D = \varepsilon_0 E$ zusammenhängt, wobei ε_0 die *elektrische Feldkonstante im Vakuum* bezeichnet. Unser Ziel ist die rechnerische Überprüfung dieses Gesetzes, bei der wir eine Punktladung q im Koordinatenursprung betrachten, die von der Oberfläche des Zylinders

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h \leq z \leq h \ , \ x^2+y^2 \leq R^2\}$$

eingeschlossen wird. Dabei ist $2h$ die Höhe des Zylinders, und R der Radius der Zylinderdeckel. Nach dem Coulombschen Gesetz erzeugt die Ladung q im Raum ein elektrisches Feld mit der Feldstärke gegeben durch $E(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|(x,y,z)\|_2^3}(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int (1+x^2)^{-3/2}\,dx$ durch Anwendung der Substitutionsregel und partielle Integration.

(b) Geben Sie je eine Parametrisierung der beiden Zylinderdeckel und der Mantelfläche des Zylinders an (kein Nachweis erforderlich).

(c) Bestimmen Sie ein äußeres Einheitsnormalenfeld auf ∂Z.

(d) Überprüfen Sie die Gleichung $\int_{(\partial Z,\nu)} \langle D, dA \rangle = q$.

Abgabe: Dienstag, 31. Mai 2022, 14:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.