Freitag, 13. Mai 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Welche Form hat der Transformationssatz für die Abbildung $\phi : (\mathbb{R}_+)^3 \to (\mathbb{R}_+)^3$, $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$, angewendet auf die „Achtelkugel“, die ensteht, indem man die kompakte Einheitskugel mit dem ersten Oktanten schneidet, der durch die Bedingung $x, y, z \geq 0$ definiert ist?

(b) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wie ändert sich die Kurvenlänge, wenn man die Komposition der Kurvenabbildung γ mit der Abbildung $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ bildet? (Begründen Sie das Ergebnis zunächst anschaulich, dann formal.)

(c) Wie unterscheiden sich Kurvenintegrale 1. und 2. Art?

Aufgabe 1

Sei $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2\}$ und $f : R \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) \quad = \quad \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \qquad \text{für} \quad (x, y, z) \in R.$$

(a) Bestimmen Sie eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass $\rho_{\text{kug}}(B) = R$ gilt und $\rho_{\text{kug}}|_B$ außerhalb von einer Nullmenge injektiv ist. Diese Eigenschaften brauchen aber nicht nachgewiesen werden.

(b) Berechnen Sie $\int_R f(x, y, z) \ d(x, y, z)$. Die Voraussetzungen des Transformationssatzes brauchen dafür nicht überprüft werden.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Länge der *Zykloide* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.
Hinweis: Für die Berechnung des Integral leiten Sie zunächst für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $1 - \cos(t) = 2\sin(t/2)^2$ aus dem Additionstheorem $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ der Kosinusfunktion her.

Aufgabe 3

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (-2xz^3, -2yz^3, 3z^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass F nicht als Gradient einer reellwertigen Funktion darstellbar ist.
(Arbeiten Sie mit dem *Satz von Schwarz.*)

(b) Finden Sie eine nullstellenfreie Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass gF Gradient einer reellwertigen Funktion ist. (Eine solche Funktion g bezeichnet man als *integrierenden Faktor.* Betrachen Sie der Einfachheit halber nur Funktionen g mit $\partial_3 g = 0$.)

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art $\int_\gamma \langle F, ds \rangle$, wobei die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t), 1)$ gegeben ist, mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$.

Dieses Blatt wird vom 16. bis zum 19. Mai 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Blatt 3** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Wir betrachen den Oktaeder $O \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$O \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \|(x,y,z)\|_1 \leq 1\} \quad ,$$

wobei $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\|(x,y,z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$ bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie für alle $y, z \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $O(z)(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in O\} \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie das Volumen $v_3(O)$ durch zweimalige Anwendung des Cavalierischen Prinzips. Dabei darf die Jordan-Messbarkeit der Menge O und all ihrer Schnitte ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der unendlich lange Zylinder vom Radius 1 entlang der z-Achse und $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ die Einheitskugel vom Radius 2. Die Menge $A = K \setminus Z$ erhält man dadurch, dass man aus der Kugel einen Zylinder vom Radius 1 „ausbohrt".

(a) Sei $1_A : \mathbb{R}^3 \to \{0,1\}$ die charakteristische Funktion von A und $\tilde{1}_A = 1_A \circ \rho_{\text{zyl}}$ die entsprechende Funktion in Zylinderkoordinten. Bestimmen Sie $\tilde{1}_A(r,h,\varphi)$ für alle $(r,h,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie das Volumen $v_3(A)$ mit Hilfe des Transformationssatz Substitutionsregel. Die Voraussetzungen des Transformationssatzes auch hier nicht überprüft werden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg in $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann bezeichnen wir

$$\ell(\gamma, \mathcal{Z}) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2$$

als die durch $\mathcal{Z}$ gegebene *Polygonapproximation* von γ. Die Kurve wird *rektifizierbar* genannt, wenn die Menge $\mathcal{L}(\gamma) = \{\ell(\gamma, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(a,b)\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, wobei $\mathcal{Z}(a,b)$ für die Menge der Zerlegungen von $[a,b]$ steht.

(a) Zeigen Sie, dass jeder stückweise stetig differenzierbare Weg rektifizierbar ist, und dass dessen Länge mit dem Supremum von $\mathcal{L}(\gamma)$ übereinstimmt.

(b) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) \quad = \quad \begin{cases} (t, t^2(\cos(\pi/t^2)) & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ (0,0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Weisen Sie nach, dass γ ein Weg (also eine stetige Abbildung), aber nicht rektifizierbar ist.

Abgabe: Dienstag, 24. Mai 2022, 14:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.