Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesung im Sommersemester 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Teil III: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Zusammenfassung

Eine *gewöhnliche Differenzialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine Funktion y und ihre Ableitungen vorkommen, eventuell auch höhere Ableitungen, zum Beispiel $y' = xy$ oder $y'' + xy' = x^2$. Nachdem wir diese Gleichungen formal eingeführt haben, beweisen wir zunächst einige allgemeine Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Anschließend behandeln wir eine Reihe von Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen von spezieller Gestalt. Eine besonders reichhaltige Theorie existiert hierbei für die *linearen* Differenzialgleichungen, auf die wir uns im zweiten Teil dieses Vorlesungsabschnitts konzentrieren werden.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differenzialgleichungen

Zusammenfassung. In diesem Einführungskapitel definieren wir Differenzialgleichungen 1. Ordnung und ihre Lösungen. Wir verallgemeinern die Definition auf beliebige Ordnung und Systeme von Differenzialgleichungen. Es wird gezeigt, dass sich jede DGL n-ter Ordnung in eine System von DGLS erster Ordnung übersetzen lässt. Die Lösungen des Systems lassen sich umwandeln in Lösungen der DGL n-ter Ordnung, und umgekehrt. Die lokale Lipschitz-Bedingung ist ein Kriterium, dass sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von Lösungen sicherstellt. Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis ist der Banachsche Fixpunktsatz aus der Analysis mehrerer Variablen.

Wichtige Grundbegriffe

- Differenzialgleichungen (DGL) erster Ordnung
- System von DGLs erster Ordnung
- Lösung einer DGL bzw. eines Systems von DGLs
- (lokale) Lipschitz-Bedingung
- maximale Lösung einer DGL

Zentrale Sätze

- Stetigkeit partieller Ableitungen ⇒ lokale Lipschitz-Bedingung
- Eindeutigkeitsatz
- lokaler Existenzsatz
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz für DGL von Picard-Lindelöf
- Existenzsatz von Peano

Definition 1.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' \quad = \quad f(x,y) \tag{1.1}$$

eine ***Differenzialgleichung (DGL) erster Ordnung***. Die Menge D bezeichnen wir als den ***Definitionsbereich*** der DGL. Eine Lösung von (1.1) ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so dass $(x,\varphi(x)) \in D$ und $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ für alle $x \in I$ gilt.

Die Gleichung $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ kann auch als ***Integralgleichung*** formuliert werden. Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung ist sie äquivalent zu

$$\varphi(x) \quad = \quad \varphi(a) + \int_a^x f(t,\varphi(t))\, dt \quad , \tag{1.2}$$

wobei der „Startpunkt" $a \in I$ beliebig gewählt werden kann. Die DGL (1.1) kann auch geometrisch interpretiert werden: Durch die Funktion f wird auf D ein ***Vektorfeld*** definiert. Der Graph $\Gamma_\varphi \subseteq D$ einer Lösung φ besitzt in jedem seiner Punkte $(x,y) \in \Gamma_\varphi$ den Vektor $(1, f(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ jeweils als Tangentialvektor.

Beispiel 1 Die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ besitzt als Lösungen die Funktionen $\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto cx$, wobei c die reellen Zahlen durchläuft. Dies überprüft man unmittelbar durch Differenziation der Funktion φ_c: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\varphi_c'(x) \quad = \quad c \quad = \quad \frac{cx}{x} \quad = \quad \frac{\varphi_c(x)}{x}.$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz, den wir Kürze formulieren werden, wird sich ergeben, dass keine weitere Lösungen der DGL existieren.

Beispiel 2 Die Differenzialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ besitzt als Lösungen die Funktionen der Form

$$\varphi_c : \left]-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \sqrt{c - x^2} \quad ,$$

wobei c die positiven reellen Zahlen durchläuft. Auch hier überprüft man die Lösungseigenschaft unmittelbar durch Differenziation: Für alle $c \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \left]-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right[$ gilt

$$\varphi_c'(x) \quad = \quad -\frac{2x}{2\sqrt{c - x^2}} \quad = \quad -\frac{x}{\varphi_c(x)}. \qquad \square$$

Definition 1.2 Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, mit Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_n$. Dann nennt man

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{aligned} \tag{1.3}$$

ein ***System von*** n ***Differenzialgleichungen*** erster Ordnung. Eine ***Lösung*** von (1.3) ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, so dass $(x, \varphi(x)) \in D$ und $\varphi_k'(x) = f_k(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$ und für $1 \le k \le n$ erfüllt ist.

Definition 1.3 Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine ***Differenzialgleichung*** n***-ter Ordnung*** ist eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} \quad = \quad f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{1.4}$$

Eine ***Lösung*** von (1.4) ist eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass $(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(x) \quad = \quad f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$$

für alle $x \in I$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\varphi^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ jeweils die k-te Ableitung der Funktion φ.

Jeder Differenzialgleichung n-ter Ordnung der Form (1.4) lässt sich ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung zuordnen, und zwar

$$y_0' = y_1 \quad , \quad y_1' = y_2 \quad , \ldots, \quad y_{n-2}' = y_{n-1} \quad , \quad y_{n-1}' = f(x, y_0, \ldots, y_{(n-1)}). \tag{1.5}$$

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1.4), dann ist durch $(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung von (1.5) gegeben. Ist umgekehrt $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})$ eine Lösung von (1.5), dann ist die Funktion φ_0 eine Lösung der DGL (1.4).

Beispiel 3 Die auf $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ definierte DGL $y'' = -y$ besitzt die Lösung $\varphi(x) = \sin(x)$. Diese DGL zweiter Ordnung entspricht dem System von DGLs erster Ordnung

$$y_0' = y_1 \quad , \quad y_1' = -y_0.$$

mit der Lösung $\psi(x) = (\sin(x), \cos(x))$.

Im folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ stets die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

(i) Wir sagen, f genügt auf D einer ***Lipschitz-Bedingung***, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert (die sog. Lipschitz-Konstante), so dass

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \quad \leq \quad L\|y - z\| \qquad \text{für alle} \quad (x,y),(x,z) \in D \qquad \text{erfüllt ist.}$$

(ii) Die Funktion f genügt auf D ***lokal*** einer Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x,y) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq D$ existiert, so dass $f|_U$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die Lipschitz-Bedingung lautet also, dass die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf der Menge $D_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in D\}$ ist.

Proposition 1.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige, nach $y_1, \ldots, y_n$ stetig partiell differenzierbare Funktion. Letzteres bedeutet, dass die Funktionen

$$(x,y) \mapsto \partial_{(0,e_i)} f(x,y) \qquad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n$$

auf ganz D definiert und stetig sind, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ jeweils den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Beweis: Sei $(a,b) \in D$ vorgegeben und $U \subseteq D$ eine kompakte, konvexe Umgebung von (a,b). Für $(x,y) \in D$ setzen wir $f_x(y) = f(x,y)$. Dann gibt es eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$, so dass die partiellen Ableitungen $\partial_i (f_x)_k(y)$ der Komponentenfunktionen $(f_x)_k$ für $(x,y) \in U$ durch γ beschränkt sind. Seien x, y, z mit $(x,y),(x,z) \in U$ vorgegeben und $v = y - z$. Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen (siehe Mathe III, Satz 3.5) gibt es für $1 \le k \le n$ jeweils ein $p_k \in]y,z[\subseteq U$, so dass

$$f_k(x,y) - f_k(x,z) \quad = \quad (f_x)_k(y) - (f_x)_k(z) \quad = \quad \partial_v (f_x)_k(p_k) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i) \partial_i (f_x)_k(p_k)$$

erfüllt ist. Die Summe $\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$ ist die 1-Norm des Differenzvektors $y - z$. Weil je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, gibt es eine Konstante α mit $\|y-z\|_1 \le \alpha \|y-z\|$ für alle $y,z \in U$. Setzen wir $L = \alpha\gamma$, dann gilt also

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \quad \le \quad \gamma \|y-z\|_1 \quad \le \quad \alpha\gamma \|y-z\| \quad = \quad L\|y-z\|$$

für alle $y,z \in U$. □

Die Bedingung in Proposition 1.5 ist natürlich insbesondere dann erfüllt, wenn f in Abhängigkeit von allen Variablen $x, y_1, ..., y_n$ stetig partiell differenzierbar ist.

Beispielsweise genügen die Funktionen $f(x,y) = \frac{y}{x}$ und $g(x,y) = -\frac{x}{y}$ aus den Beispielen 1 und 2 einer lokalen Lipschitz-Bedingung, denn sowohl die Funktionen selbst als auch ihre partiellen Ableitungen nach y gegeben durch $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ und $(x,y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Bevor wir nun die Existenz- und Eindeutigkeitssätze formulieren und beweisen, führen wir noch die folgende Notation ein: Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, dann setzen wir

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad = \quad \left(\int_a^b g_1(x)\,dx, ..., \int_a^b g_n(x)\,dx \right) \quad ,$$

wobei $g_1, .., g_n$ die Komponentenfunktionen von g bezeichnen. Ist $\alpha \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante mit $\|g(x)\| \le \alpha$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $|g_k(x)| \le \alpha$ für alle $x \in [a,b]$ und $1 \le k \le n$. Es folgt $\int_a^b |g_k(x)|\,dx \le \alpha(b-a)$ für alle k und somit

$$\left\| \int_a^b g(x)\,dx \right\| \quad = \quad \max \left\{ \left| \int_a^b g_k(x)\,dx \right| \;\middle|\; 1 \le k \le n \right\} \quad \le$$

$$\max \left\{ \int_a^b |g_k(x)|\,dx \;\middle|\; 1 \le k \le n \right\} \quad \le \quad \alpha(b-a).$$

Satz 1.6 *(Eindeutigkeitssatz)*
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen des Systems von DGLs

$$y' \quad = \quad f(x,y) \qquad \text{auf einem offenen Intervall } I \subseteq \mathbb{R}.$$

Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, dann folgt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis: Wir beweisen zunächst eine „lokale" Eindeutigkeit der folgenden Form: Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - a| \le \varepsilon$. Durch Integration von $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und

$\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ erhalten wir mit der Voraussetzung $\varphi(a) = \psi(a)$ für $x \in I$ die Gleichung

$$\varphi(x) - \psi(x) \quad = \quad \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)))\, dt.$$

Auf Grund der lokalen Lipschitz-Bedingung gibt es $L, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \quad \leq \quad L\|\varphi(t) - \psi(t)\| \qquad \text{für alle } t \in I \quad \text{mit} \quad |t - a| \leq \varepsilon_1.$$

Sei nun $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1]$ und $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Dann gilt

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \quad \leq \quad \int_a^x \|(f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)))\|\, dt \quad \leq \quad L \left| \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\|\, dt \right|.$$

Setzen wir nun jeweils $m(\varepsilon) = \sup\{\|\varphi(t) - \psi(t)\| \mid |t - a| \leq \varepsilon\}$, dann erhalten wir die Abschätzung

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \quad \leq \quad L|x - a| m(\varepsilon) \quad \leq \quad L\varepsilon m(\varepsilon).$$

Bilden wir auf der linken Seite das Maximum über alle $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, dann folgt $m(\varepsilon) \leq L\varepsilon m(\varepsilon)$. Sei nun $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1]$ so klein gewählt, dass $L\varepsilon < 1$ ist. Dann muss $m(\varepsilon) = 0$ gelten. Wir erhalten $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle x mit $|x - a| \leq \varepsilon$.

Damit ist die lokale Eindeutigkeit bewiesen. Nun zeigen wir, dass sich die Eindeutigkeit der Lösung im Rahmen des Definitionsbereichs beliebig weit nach rechts fortsetzen lässt, dass also $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ gilt. Dazu definieren wir

$$b \quad = \quad \sup\,\{t \in I \mid \varphi|_{[a,t]} = \psi|_{[a,t]}\}.$$

Ist $b = +\infty$ oder das rechte Intervallende von I, dann sind wir fertig. Ansonsten gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $[b, b+\delta] \subseteq I$, und es gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle x mit $a \leq x < b$. Weil φ und ψ stetig sind, gilt auch $\varphi(b) = \psi(b)$. Wenden wir nun die im ersten Teil bewiesene Aussage auf den Anfangspunkt b an, so erhalten wir ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - b| < \varepsilon$, im Widerspruch zur Definition von b. Also muss $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ gelten. Genauso beweist man, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \leq a$ erfüllt ist. □

Ein Beispiel für eine Differenzialgleichung, für die der Eindeutigkeitssatz ***nicht*** gilt, ist durch

$$y' \quad = \quad y^{2/3}$$

gegeben. Eine Lösung dieser DGL durch den Punkt $(0, 0)$ erhält man durch die Nullfunktion, also durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Aber auch die Funktion $\psi(x) = \frac{1}{27}x^3$ ist eine Lösung durch diesen Punkt, denn es gilt $\psi(0) = 0$ und

$$\psi'(x) \quad = \quad \tfrac{3}{27}x^2 \quad = \quad \tfrac{1}{9}x^2 \quad = \quad \left(\tfrac{1}{27}x^3\right)^{2/3}.$$

Allgemein kann man leicht überprüfen, dass für jedes Paar $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ mit $b < 0$ und $c > 0$ die Funktion

$$\psi_{bc}(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{27}(x - b)^3 & \text{für } x \leq b \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq c \\ \frac{1}{27}(x - c)^3 & \text{für } x \geq c \end{cases}$$

eine Lösung der DGL ist. Denn es gilt $\psi_{bc}(0) = 0$, für alle $x > c$ gilt

$$\psi'_{bc}(x) \quad = \quad \tfrac{1}{9}(x - c)^2 \quad = \quad \left(\tfrac{1}{27}(x - c)^3\right)^{2/3} \quad ,$$

und für $x < b$ erhält man ebenso

$$\psi'_{bc}(x) \quad = \quad \tfrac{1}{9}(x-b)^2 \quad = \quad \left(\tfrac{1}{27}(x-b)^3\right)^{2/3}.$$

Für $b < x < c$ ist $\psi'_{bc}(x) = 0$ und $\psi_{bc}(x) = 0$, also ist die Gleichung $\psi'_{bc}(x) = \psi(x)^{2/3}$ auch hier erfüllt. An den kritischen Stellen $x = b$ und $x = c$ zeigt man durch Betrachtung der links- und rechtsseitigen Ableitung, dass ψ'_{bc} auch hier gleich Null ist.

Der Eindeutigkeitssatz kann auf die Funktion $f(x,y) = y^{2/3}$ nicht angewendet werden, weil sie in einer Umgebung von $(0,0)$ keiner lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Beispielsweise gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(0,\frac{1}{n}) - f(0,\frac{1}{2n})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}} \quad = \quad \frac{n^{-2/3} - (2n)^{-2/3}}{\frac{1}{2n}} \quad = \quad 2n(n^{-2/3} - (2n)^{-2/3})$$
$$= \quad 2n^{1/3} - (2n)^{1/3} \quad = \quad (2 - 2^{1/3})n^{1/3}.$$

Für $n \to \infty$ geht dieser Wert gegen unendlich. Es gibt also keine Umgebung U von $(0,0)$, so dass die Ungleichung $|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z|$ für alle $(x,y),(x,z) \in U$ mit einer geeigneten Konstanten $L > 0$ erfüllt ist.

Nach der Eindeutigkeit beschäftigen wir uns nun mit der *Existenz* von Lösungen einer DGL. Das wesentliche Hilfsmittel hierbei ist der ***Banachsche Fixpunktsatz***, den wir bereits in der Analysis mehrerer Variablen kennengelernt haben: Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\phi : X \to X$ eine Kontraktion, dann besitzt ϕ in X einen eindeutig bestimmten Fixpunkt, also ein $a \in X$ mit $\phi(a) = a$. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung ϕ als ***Kontraktion*** bezeichnet wird, wenn es eine Konstante $\gamma \in [0,1[$ gibt, so dass

$$d(\phi(x),\phi(y)) \quad \le \quad \gamma d(x,y) \qquad \text{für alle} \quad x,y \in X \quad \text{erfüllt ist.}$$

Lemma 1.7 Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \sup\{\|f(x)\| \mid x \in I\}$$

ein Banachraum, also ein vollständiger normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ gegeben ist. Sei dazu $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ vorgegeben. Ist f die Nullfunktion, dann gilt $\|f(x)\| = 0$ für alle $x \in I$, und es folgt $\|f\|_\infty = 0$. Setzen wir umgekehrt $\|f\|_\infty = 0$ voraus, dann folgt $\|f(x)\| = 0$ und auf Grund der Normeigenschaft von $\|\cdot\|$ auch $f(x) = 0$ für alle $x \in I$. Also ist in diesem Fall f der Nullvektor in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$.

Ist $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ und $0 \ne \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in I$ die Abschätzung $\|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\| \le |\lambda|\|f\|_\infty$ und somit auch $\|\lambda f\|_\infty \le |\lambda|\|f\|_\infty$. Setzen wir $g = \lambda f$, dann erhalten wir ebenso

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \|\tfrac{1}{\lambda}g\|_\infty \quad \le \quad |\tfrac{1}{\lambda}|\|g\|_\infty \quad = \quad \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty \quad ,$$

also $|\lambda|\|f\|_\infty \le \|\lambda f\|_\infty$ und insgesamt Gleichheit. Für $\lambda = 0$ ist die Gleichung $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$ offenbar ebenfalls erfüllt. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $f,g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ vorgegeben. Für alle $x \in I$ ist $\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \le \|f(x)\| + \|g(x)\| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, also auch $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Damit sind die Normeigenschaften nachgewiesen.

Sei nun $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k,m \geq K$ erfüllt ist. Es folgt $\|f_k(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k,m \geq K$, d.h. die Folge $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ ist für jedes $x \in I$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Da der $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder Norm vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ gegen einen Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist, dass die auf diese Weise definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig und ein Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ ist.

Wir beweisen die Stetigkeit von f mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums. Seien $c \in I$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $k,m \geq K$. Auf Grund der Stetigkeit der Normfunktion auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\|f_K(x) - f(x)\| \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \|f_K(x) - f_m(x)\| \quad \leq \quad \lim_{m\to\infty} \|f_K - f_m\|_\infty \quad \leq \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

für alle $x \in I$. Weil die Funktion f_K im Punkt c stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f_K(x) - f_K(c)\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - c| < \delta$. Es folgt

$$\|f(x) - f(c)\| \quad \leq \quad \|f(x) - f_K(x)\| + \|f_K(x) - f_K(c)\| + \|f_K(c) - f(c)\| \quad < \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $|x - c| < \delta$. Damit ist die Stetigkeit von f bewiesen. Wir wenden nun die Cauchyfolgen-Eigenschaft noch einmal an, um zu zeigen, dass f der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ ist. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k,m \geq K$, also $\|f_k(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k,m \geq K$. Durch Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir $\|f_k(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k \geq K$, also $\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für $k \geq K$. Also ist f tatsächlich der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$. □

Lemma 1.8 Sei $\bar{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist die Menge der Funktionen $\mathcal{C}(I,\bar{B})$ abgeschlossen in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$. Also ist $\mathcal{C}(I,\bar{B})$ bezüglich der Metrik $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(I,\bar{B})$, die in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ einen Grenzwert f besitzt. Zu zeigen ist, dass $f \in \mathcal{C}(I,\bar{B})$ gilt. Ist $x \in I$ ein beliebiger Punkt, dann bilden die Vektoren $f_m(x)$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die wegen

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f(x)\| \quad \leq \quad \lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_\infty \quad = \quad 0$$

gegen $f(x)$ konvergiert. Weil $\bar{B}$ in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist und alle Vektoren in $f_m(x)$ in $\bar{B}$ liegen, gilt dasselbe auch für den Grenzwert $f(x)$. Damit haben wir gezeigt, dass f eine Funktion $I \to \bar{B}$ ist. □

Satz 1.9 *(lokaler Existenzsatz)*

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(a,b) \in D$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung $\varphi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}^n$ des Systems $y' = f(x,y)$ mit $\varphi(a) = b$.

Beweis: Unser Ziel besteht darin, den Banachschen Fixpunktsatz auf einen vollständigen metrischen Raum der Gestalt anzuwenden, wie er in Lemma 1.8 beschrieben wird. Die Rolle der Kontraktion fällt dabei dem Operator zu, der einer Funktion φ die Integralfunktion $x \mapsto \int_a^x f(t,\varphi(t))\,dt$ zuordnet. Ein Fixpunkt der Kontraktion ist eine Lösung des Systems, denn die Differenzialgleichung $y' = f(x,y)$ ist äquivalent zur Integralgleichung (1.2), wie wir bereits zu

Beginn des Kapitels festgestellt haben. Der Hauptaufwand besteht darin, alles so einzurichten, dass der beschriebene Operator tatsächlich eine Kontraktion darstellt, so dass der Banachsche Fixpunktsatz angewendet werden kann.

Sei dazu $(a,b) \in D$ vorgegeben, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein hinreichend kleines kompaktes Intervall mit a in seinem Inneren und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass die Menge $X = I \times \bar{B}_\varepsilon(b)$ in D enthalten ist und f auf X eine Lipschitz-Bedingung mit einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}^+$ genügt. Weil X kompakt und f stetig ist, gibt es ein $m \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f(t,x)\| \le m$ für alle $(t,x) \in X$. Weiter wählen wir $\delta \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass das Intervall $J = [a-\delta, a+\delta]$ in I enthalten ist und die Ungleichungen $L\delta < 1$ sowie $m\delta < \varepsilon$ gelten. Wir definieren nun auf dem Banachram $V = \mathcal{C}(J,\mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ die Abbildung $\Phi : V \to V$ gegeben durch

$$\Phi(\varphi)(x) = b + \int_a^x f(t,\varphi(t))\,dt$$

sowie die Teilmenge $Y = \mathcal{C}(J,\bar{B}_\varepsilon(b))$ von V. Dann ist Y nach Lemma 1.8 mit $d(\varphi,\psi) = \|\varphi-\psi\|_\infty$ ebenfalls ein Banachraum. Für alle $\varphi \in Y$ und $x \in J$ gilt

$$\|\Phi(\varphi)(x) - b\| \quad \le \quad \left\| \int_a^x f(t,\varphi(t))\,dt \right\| \quad \le \quad m\delta \quad < \quad \varepsilon \quad ,$$

also ist auch $\Phi(\varphi)$ in Y enthalten, und folglich ist Φ eine Abbildung $Y \to Y$. Wir zeigen nun, dass es sich bei Φ um eine Kontraktion auf Y handelt. Seien $\varphi,\psi \in Y$ vorgegeben. Für jedes $t \in J$ gilt nach Voraussetzung $\varphi(t),\psi(t) \in \bar{B}_\varepsilon(b)$, und auf Grund der Lipschitz-Bedingung gilt $\|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\| \le L\|\varphi(t)-\psi(t)\|$. Wir erhalten somit

$$\|\Phi(\varphi)-\Phi(\psi)\|_\infty \quad = \quad \sup_{x\in J} \left\| \int_a^x (f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)))\,dt \right\|$$

$$\le \quad \sup_{x\in J} \int_a^x \|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\|\,dt \quad \le \quad \sup_{x\in J} |x-a| \cdot L \cdot \|\varphi-\psi\|_\infty \quad = \quad \delta L \|\varphi-\psi\|_\infty .$$

Wegen $\delta L < 1$ ist die Kontraktionseigenschaft damit nachgewiesen. Sei nun $\varphi \in Y$ ein Fixpunkt von Φ. Aus $\Phi(\varphi) = \varphi$ folgt dann $\varphi(x) = b + \int_a^x f(t,\varphi(t))\,dt$ und $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ für alle $x \in J$. □

Satz 1.10 *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)*
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a,b) \in D$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt

(i) $\varphi(a) = b$ und $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ für alle $x \in I$

(ii) Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres offenes Intervall mit $a \in J$ und $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi(a) = b$ und $\psi'(x) = f(x,\psi(x))$ für alle $x \in J$, dann gilt $J \subseteq I$ und $\varphi|_J = \psi$.

Man bezeichnet φ als ***maximale Lösung*** des Anfangswertproblems gegeben durch die gewöhnliche Differenzialgleichung $y' = f(x,y)$ und das Paar (a,b).

Beweis: Auf Grund des lokalen Existenzsatzes gibt es zumindest ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass auf dem offenen Intervall $I_\delta =]a-\delta, a+\delta[$ eine Lösung φ des Anfangswertproblems existiert. Sei x_+ das Supremum über alle $x > a$ mit der

Eigenschaft, dass es auf $]a-\delta, x[$ eine solche Lösung gibt. Dann ist $a+\delta \leq x_+ \leq +\infty$. Aus dem Eindeutigkeitssatz, Satz 1.6, folgt, dass insgesamt auf $]a-\delta, x_+[$ eine Lösung φ_+ existiert. Ist nämlich $x \in]a-\delta, x_+[$ vorgegeben, dann wählt man eine beliebige Lösung φ auf einem offenen Intervall I, dass a und x enthält, und definiert $\varphi_+(x) = \varphi(x)$. Durch den Eindeutigkeitssatz ist sichergestellt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Lösung ist.

Ebenso bilden wir das Infimum x_- über alle $x < a$ mit der Eigenschaft, dass auf $]x, a+\delta[$ eine Lösung existiert. Dann gilt $-\infty \leq x_- \leq a-\delta$, und auf $]x_-, a+\delta[$ gibt es eine Lösung φ_-. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes stimmen φ_- und φ_+ auf I_δ überein, so dass wir insgesamt eine Lösung φ auf $I =]x_-, x_+[$ erhalten, mit $\varphi|_{]a-\delta, x_+[} = \varphi_+$ und $\varphi|_{]x_-, a+\delta[} = \varphi_-$.

Sei nun $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ wie unter (ii) angegeben. Ist J keine Teilmenge von I, dann gibt es ein $c \in J$ mit $c > x_+$ oder $c < x_-$. Nehmen wir an, dass der erste Fall eintritt. Wegen des Eindeutigkeitssatzes stimmen φ und ψ auf $]a, x_+[$ überein, und wir erhalten insgesamt eine Lösung auf $]a-\delta, c[$, im Widerspruch zur Definition von x_+ als Supremum. Genauso kann $c < x_-$ ausgeschlossen werden. Die Gleichung $\varphi|_J = \psi$ folgt erneut aus dem Eindeutigkeitssatz. □

Wir formulieren den Existenz- und Eindeutigkeitssatz in der letzten Version noch einmal für Differenzialgleichungen n-ter Ordnung. Auf Grund der Bemerkung zur Korrespondenz zwischen Lösungen eines Systems erster Ordnung und einer DGL n-ter Ordnung (im Anschluss an Definition 1.3) folgt diese Aussage unmittelbar aus dem soeben bewiesenen Satz 1.10.

Folgerung 1.11 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$, $b = (b_0, ..., b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein offenes Intervall I mit $a \in I$ und eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Die Funktion φ ist eine Lösung der DGL $y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ mit $b_k = \varphi^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n-1$.

(ii) Ist $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung auf einem offenen Intervall mit den unter (i) genannten Eigenschaften, dann gilt $J \subseteq I$ und $\varphi|_J = \psi$.

Neben dem hier bewiesenen Existenz- und Eindeutigkeitssatz spielt auch der sog. *Existenzsatz von Peano* in der Theorie der Differenzialgleichungen eine wichtige Rolle, bei dem für f nur die Stetigkeit, aber keine lokale Lipschitz-Bedingung gefordert wird. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Lösung der DGL. Sie ist aber nicht mehr eindeutig bestimmt, noch nicht einmal lokal, wie das Beispiel nach Satz 1.6 zeigt.

Satz 1.12 *(Existenzsatz von Peano)*
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(a, b) \in D$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [Au], Abschnitt 2.2.

§ 2. Elementare Lösungsmethoden für DGLs in spezieller Form

Zusammenfassung. In diesem Kapitel behandeln wir Lösungmethoden für eine Reihe von Differenzialgleichungen spezieller Form. Eine DGL mit *getrennten Variablen* hat die Form $y' = f(x)g(y)$. Eine *lineare* DGL ist eine Differenzialgleichung der Form $y' = f(x)y + g(x)$. Ist $g = 0$, dann spricht man von einer *homogenen*, sonst von einer *inhomogenen* DGL. Die *exakten* DGLs spielen vor allem in der Physik eine wichtige Rolle. Diese haben die Form $y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, wobei für f und g eine gemeinsame Stammfunktion existiert. Dabei handelt es sich um eine Funktion F mit $\partial_1 F = f$ und $\partial_2 F = g$.

Wichtige Grundbegriffe

- Differenzialgleichung mit getrennten Variablen
- homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichung
- exakte Differenzialgleichung, Stammfunktion
- integrierender Faktor

Definition 2.1 Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gilt. Dann nennt man $y' = f(x)g(y)$ eine Differentialgleichung mit ***getrennten Variablen***.

Der folgende Satz zeigt, wie eine solche Differentialgleichung gelöst werden kann.

Satz 2.2 Seien die Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ und $G : J \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ und $G(x) = \int_b^x g(t)^{-1}\,dt$. Ist dann $H : J' \to J$ die Umkehrfunktion von G und $I' \subseteq I$ ein offenes Intervall mit $F(I') \subseteq J'$, dann ist

$$\varphi : I' \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto (H \circ F)(x)$$

eine durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL. Diese ist eindeutig bestimmt, d.h. in einer hinreichend kleinen Umgebung von a stimmt jede Lösung der DGL durch (a, b) mit φ überein.

Beweis: Nach Definition gilt $F(a) = G(b) = 0$, und aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung folgt $F'(x) = f(x)$ für alle $t \in I$ und $G'(y) = g(y)^{-1}$ für alle $y \in J$. Weil die Ableitung von G nirgends null wird, existiert die Umkehrfunktion H von G. Für alle $x \in I'$ gilt nun $\varphi(x) = (H \circ F)(x)$, was zu $(G \circ \varphi)(x) = F(x)$ umgeformt werden kann. Mit der Kettenregel erhält man

$$(G \circ \varphi)'(x) = F'(x) \quad \Leftrightarrow \quad G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)).$$

Außerdem gilt $G(b) = 0 \Leftrightarrow b = H(0)$ und folglich $\varphi(a) = H(F(a)) = H(0) = b$. Dies zeigt, dass φ eine Lösung der DGL durch den Punkt (a, b) ist.

Sei nun $\psi : I'' \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der DGL durch den Punkt (a, b), es gelte also $a \in I''$ und $\psi(a) = b$. Dann gilt $\psi'(x) = f(x)g(\psi(x))$ für alle $x \in I''$. Wegen $\psi(a) = b \in J$ können wir nach eventueller Verkleinerung des Intervalls I'' annehmen, dass $I'' \subseteq I$ und $\varphi(x) \in J$ für alle $x \in I''$ gilt. Wir können dann die obige Äquivalenzumformung durchführen und erhalten $(G \circ \psi)'(x) = F'(x)$ für alle $x \in I''$. Es gibt also eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $(G \circ \psi)(x) = F(x) + c$ für alle $x \in I''$, und wegen $c = F(a) + c = (G \circ \psi)(a) = G(b) = 0$ muss diese Konstante gleich null sein. Aus der Gleichung $(G \circ \psi)(x) = F(x)$ folgt nun $\psi(x) = (H \circ F)(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in I''$. □

Um das Lösungsverfahren zu illustrieren, bestimmen wir für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ eine Lösung φ_c der Differentialgleichung

$$y' \quad = \quad y^2 \qquad \text{mit} \qquad \varphi_c(0) = c$$

im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Dazu betrachten wir die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$. Die zugehörigen Funktionen F und G sind dann definiert durch

$$F(x) \quad = \quad \int_0^x dt \quad = \quad x \qquad \text{und} \qquad G(y) \quad = \quad \int_c^y \frac{dt}{t^2} \quad = \quad -\frac{1}{t}\bigg|_c^y \quad = \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen $G(\,]0, +\infty[\,) = \,]-\infty, \frac{1}{c}[$ können wir $I' = \,]-\infty, \frac{1}{c}[$ wählen; dies ist das maximale offene Intervall mit $F(I') = I' \subseteq G(\,]0, +\infty[\,)$. Die Umkehrfunktion H von G erhält man durch die Umformung

$$x = G(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\frac{1}{c} - x} = \frac{c}{1 - cx} \quad ,$$

die gesuchte Funktion ist also $y = H(x)$. Für alle $x \in I'$ gilt $H(F(x)) = H(x) = \frac{c}{1-cx}$. Durch $\varphi_c(x) = \frac{c}{1-cx}$ ist also eine Lösung $\varphi_c : I' \to \mathbb{R}$ der DGL mit $\varphi_c(0) = c$ definiert. Tatsächlich gilt

$$\varphi_c'(x) \quad = \quad (-c^2)(-1)(1 - cx)^{-2} \quad = \quad \frac{c^2}{(1 - cx)^2} \quad = \quad \left(\frac{c}{1 - cx}\right)^2 \quad = \quad \varphi_c(x)^2.$$

für alle $x \in I'$.

In einigen Fällen können DGLs durch Substitution auf die Form mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

Satz 2.3 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten die DGLs der Form

(1) $y' = f(ax + by + c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

(2) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

(3) $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$.

(i) Genau dann ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1), wenn $\psi(x) = ax + b\varphi(x) + c$ eine Lösung der DGL $y' = a + bf(y)$ ist.

(ii) Genau dann ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2), wenn $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ eine Lösung der DGL $y' = \frac{1}{x}(f(y) - y)$ ist.

(iii) Die Form (3) kann durch eine lineare Substitution auf die Form (2) zurückgeführt werden.

Beweis: zu (i) Definieren wir $\psi : I \to \mathbb{R}$ wie angegeben, dann folgt $\psi'(x) = a+b\varphi'(x)+c = a+bf(ax+b\varphi(x)+c) = a+bf(\psi(x))$, also ist ψ tatsächlich eine Lösung von $y' = a+bf(y)$. Setzen wir dies umgekehrt voraus, dann kann die Gleichung $\psi(x) = ax+b\varphi(x)+c$ zu $\varphi(x) = \frac{1}{b}\psi(x) - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ umgeformt werden, und wir erhalten

$$\varphi'(x) \quad = \quad \tfrac{1}{b}\psi'(x) - \tfrac{a}{b} \quad = \quad \tfrac{1}{b}(a+bf(\psi(x)) - \tfrac{a}{b} \quad = \quad f(\psi(x)) \quad = \quad f(ax+b\varphi(x)+c).$$

Dies zeigt, dass φ eine Lösung von $y' = f(ax+by+c)$ ist.

zu (ii) Zunächst bemerken wir, dass $0 \notin I$ gelten muss, da ansonsten die Lösungsfunktion φ nicht in die DGL eingesetzt werden könnte. Ist nun $\psi : I \to \mathbb{R}$ wie angegeben definiert, dann erhalten wir mit der Quotientenregel

$$\psi'(x) \quad = \quad \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} \quad = \quad \frac{xf(\frac{\varphi(x)}{x}) - \varphi(x)}{x^2} \quad = \quad \tfrac{1}{x}\left(f(\tfrac{\varphi(x)}{x}) - \tfrac{\varphi(x)}{x}\right) \quad = \quad \tfrac{1}{x}(f(\psi(x)) - \psi(x)).$$

Dies zeigt, dass ψ eine Lösung von $y' = \frac{1}{x}(f(y)-y)$ ist. Setzen wir dies nun wiederum voraus, dann erhalten wir mit $\varphi(x) = x\psi(x)$ die Gleichung $\varphi'(x) = \psi(x)+x\psi'(x) = \psi(x)+x\frac{1}{x}(f(\psi(x))-\psi(x)) = \psi(x)+f(\psi(x))-\psi(x) = f(\psi(x)) = f(\frac{\varphi(x)}{x})$. Also ist φ eine Lösung von $y' = f(\frac{y}{x})$.

zu (iii) Auf Grund der Voraussetzung an die Determinante hat das lineare Gleichungssystem $ax+by+c=0$, $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ genau eine Lösung (x_0, y_0). Ist nun $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der angegebenen DGL mit $x_0 \notin I$, und definieren wir $\psi : I' \to \mathbb{R}$ durch $I' = (-x_0)+I$ und $\psi(x) = \varphi(x+x_0) - y_0$, so zeigt die Rechnung

$$\psi'(x) \quad = \quad \varphi'(x+x_0) \quad = \quad f\left(\frac{a(x+x_0)+b\varphi(x+x_0)+c}{\alpha(x+x_0)+\beta\varphi(x+x_0)+\gamma}\right) \quad = \quad f\left(\frac{ax+b\psi(x)+c+ax_0+by_0}{\alpha x+\beta\psi(x)+\gamma+\alpha x_0+\beta y_0}\right)$$

$$= \quad f\left(\frac{ax+b\psi(x)}{\alpha x+\beta\psi(x)}\right) \quad = \quad f\left(\frac{a+b\frac{\psi(x)}{x}}{\alpha+\beta\frac{\psi(x)}{x}}\right) \quad ,$$

dass ψ eine Lösung der DGL $y' = g(\frac{y}{x})$ mit $g(y) = f(\frac{a+by}{\alpha+\beta y})$ ist, die mit der in (ii) angegebenen Substitution gelöst werden kann. Dabei ist zu beachten, dass $0 \notin I'$ gilt, da ansonsten x_0 in I enthalten wäre, was oben ausgeschlossen wurde. Ist umgekehrt ψ eine Lösung dieser DGL, dann ist durch $\varphi(x) = \psi(x-x_0)+y_0$ eine Lösung der ursprünglichen DGL gegeben, denn es gilt jeweils

$$\varphi'(x) \quad = \quad \psi'(x-x_0) \quad = \quad g\left(\frac{\psi(x-x_0)}{x-x_0}\right) \quad = \quad f\left(\frac{a+b\frac{\psi(x-x_0)}{x-x_0}}{\alpha+\beta\frac{\psi(x-x_0)}{x-x_0}}\right) \quad = \quad f\left(\frac{a(x-x_0)+b\psi(x-x_0)}{\alpha(x+x_0)+\beta(x+x_0)}\right)$$

$$= \quad f\left(\frac{ax+b\varphi(x)-ax_0-by_0}{\alpha x+\beta\varphi(x)-\alpha x_0-\beta y_0}\right) \quad = \quad f\left(\frac{ax+b\varphi(x)+c}{\alpha x+\beta\varphi(x)+\gamma}\right). \qquad \square$$

Definition 2.4 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' \quad = \quad f(x)y + g(x)$$

eine ***lineare DGL*** erster Ordnung. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann spricht man von einer ***homogenen***, ansonsten von einer ***inhomogenen*** Differentialgleichung.

Folgende allgemeine Aussagen lassen sich über die Lösungsmenge linearer DGL formulieren.

Proposition 2.5

(i) Für jedes Paar $(a,b) \in I \times \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch (a,b). Diese ist gegeben durch $\varphi(x) = be^{F(x)}$ mit der Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(ii) Sind φ_1, φ_2 Lösungen der homogenen linearen DGL, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda\varphi_1$ Lösungen dieser DGL.

(iii) Sei ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL. Dann sind die Lösungen dieser DGL insgesamt die Funktionen der Form $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ die Lösungen der homogenen linearen DGL durchläuft.

Beweis: zu (i) Auf Grund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt $F'(x) = f(x)$, und mit der Kettenregel erhalten wir $\varphi'(x) = be^{F(x)}F'(x) = be^{F(x)}f(x) = f(x)\varphi(x)$ auf Grund der Kettenregel, jeweils für alle $x \in I$. Außerdem gilt $F(a) = 0$ und somit $\varphi(a) = be^{F(a)} = be^0 = b$. Die Lösung ist nach Satz 1.6 eindeutig bestimmt, weil die DGL einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt: Auf Grund der Stetigkeit von f existiert eine offene Umgebung $I' \subseteq I$ von a und eine konstante L, so dass $|f(x)| \le L$ für alle $x \in I'$ gilt. Für alle $(x,y),(x,z) \in I' \times \mathbb{R}$ erhalten wir dann $|f(x)y - f(x)z| = |f(x)||y-z| \le L|y-z|$.

zu (ii) Beide Gleichungen können direkt nachgerechnet werden: Für alle $x \in I$ gilt $(\varphi_1 + \varphi_2)'(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = f(x)\varphi_1(x) + f(x)\varphi_2(x) = f(x)(\varphi_1 + \varphi_2)(x)$, und ebenso erhält man $(\lambda\varphi_1)'(x) = \lambda\varphi_1'(x) = \lambda f(x)\varphi_1(x) = f(x)(\lambda\varphi_1)(x)$.

zu (iii) Auch diese Äquivalenz überprüft man durch reines Einsetzen. Ist φ eine Lösung der homogenen und ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL, dann ist $\psi = \psi_0 + \varphi$ ebenfalls eine Lösung der inhomogenen DGL, denn für alle $x \in I$ gilt jeweils $\psi'(x) = \psi_0'(x) + \varphi'(x) = f(x)\psi_0(x) + g(x) + f(x)\varphi(x) = f(x)(\psi_0 + \varphi)(x) + g(x) = f(x)\psi(x) + g(x)$. Ist umgekehrt ψ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL und definieren wir $\varphi = \psi - \psi_0$, dann gilt offenbar $\psi = \psi_0 + \varphi$, und φ ist eine Lösung der homogenen DGL, denn es gilt $\varphi'(x) = \psi'(x) - \psi_0'(x) = f(x)\psi(x) + g(x) - f(x)\psi_0(x) - g(x) == f(x)(\psi - \psi_0)(x) = f(x)\varphi(x)$. □

Satz 2.6 *(Variation der Konstanten)*

Sei $(a,b) \in I \times \mathbb{R}$ vorgegeben und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch $(a,1)$. Sei $u : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) \quad = \quad b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt \qquad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Dann ist $\psi = u\varphi$ die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL $y' = f(x)y + g(x)$ durch den Punkt (a,b).

Beweis: Dass es sich bei ψ um eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL handelt, ist äquivalent zu

$$\psi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x) \quad\Leftrightarrow\quad u(x)\varphi'(x) + u'(x)\varphi(x) = f(x)u(x)\varphi(x) + g(x) \quad\Leftrightarrow$$
$$u(x)f(x)\varphi(x) + u'(x)\varphi(x) = u(x)f(x)\varphi(x) + g(x) \quad\Leftrightarrow\quad u'(x)\varphi(x) = g(x) \quad\Leftrightarrow\quad u'(x) = \frac{g(x)}{\varphi(x)} \quad ,$$

jeweils für alle $x \in I$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung äquivalent dazu, dass $u(x) = b' + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\, dt$ mit einer Konstanten $b' \in \mathbb{R}$ gilt. Die Lösung $\psi = u\varphi$ läuft genau dann durch den Punkt (a, b), wenn $b' = u(a) = u(a)\varphi(1) = b$ gilt. Die Lösung ist nach Satz 1.6 eindeutig bestimmt, weil auch die inhomogene DGL einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt: Wiederum können wir eine offene Umgebung $I' \subseteq I$ von a und eine konstante L wählen, so dass $|f(x)| \le L$ für alle $x \in I'$ gilt. Für alle $(x, y), (x, z) \in I' \times \mathbb{R}$ erhalten wir dann $|(f(x)y + g(x)) - (f(x)z + g(x))| = |f(x)||y - z| \le L|y - z|$. □

Zur Illustration bestimmen wir für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $\psi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL

$$y' \quad = \quad 2xy + x^3 \qquad \text{mit} \quad \psi_b(0) = b.$$

Diese inhomogene lineare DGL ist aus den Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^3$ aufgebaut. Die zugehörige Funktion F erhalten wir durch

$$F(x) \quad = \quad \int_0^x f(t)\, dt \quad = \quad \int_0^x 2t\, dt \quad = \quad t^2 \Big|_0^x \quad = \quad x^2.$$

Somit ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = 2xy$ mit $\varphi(0) = 1$. Um die inhomogene lineare DGL zu lösen, bestimmen wir die Hilfsfunktion u. Mit Hilfe der Substitutionsregel und durch partielle Integration erhalten wir

$$u(x) \quad = \quad b + \int_0^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\, dt \quad = \quad b + \int_0^x \frac{t^3}{e^{t^2}}\, dt \quad = \quad b + \tfrac{1}{2}\int_0^x (2t)t^2 e^{-t^2}\, dt \quad =$$
$$b + \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} s e^{-s}\, ds \quad = \quad b - \tfrac{1}{2} s e^{-s}\Big|_0^{x^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} e^{-s}\, ds \quad = \quad b - \tfrac{1}{2} s e^{-s} - \tfrac{1}{2} e^{-s}\Big|_0^{x^2} \quad =$$
$$b - \tfrac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \tfrac{1}{2}e^{-x^2} + \tfrac{1}{2} \quad = \quad b + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}.$$

Durch $\psi_b(x) = \varphi(x)u(x) = (b + \frac{1}{2})e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ ist also eine Lösung mit $\psi_b(0) = b$ gegeben.

Definition 2.7 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in G$ gilt. Wir bezeichnen eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ als ***Stammfunktion*** von (f, g), wenn $\partial_1 F = f$ und $\partial_2 F = g$ gilt. Die Differenzialgleichung

$$y' \quad = \quad -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

wird ***exakte DGL*** genannt, wenn das Paar (f, g) eine Stammfunktion besitzt.

Ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion ist die Gültigkeit der Gleichung

$$\partial_2 f \quad = \quad \partial_1 g \qquad \text{auf } G.$$

Denn nach dem Satz von Schwarz aus der Analysis mehrerer Variablen erfüllen die zweifachen partiellen Ableitungen einer Stammfunktion F die Bedingung $\partial_{12}F = \partial_{21}F$, woraus sich $\partial_2 f = \partial_2(\partial_1 F) = \partial_{21}F = \partial_{12}F = \partial_1(\partial_2 F) = \partial_1 g$ ergibt.

Satz 2.8 Sei F eine Stammfunktion des Paares (f,g). Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I ist genau dann eine Lösung der DGL $y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, wenn $(t,\varphi(t)) \in G$ für alle $t \in I$ gilt und die Funktion $t \mapsto F(t,\varphi(t))$ auf I konstant ist.

Beweis: Die Konstanz der Funktion $h : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t,\varphi(t))$ ist äquivalent zu $h'(t) = 0$ für alle $t \in I$. Die Funktion h erhält man durch Komposition der Abbildung $u : I \to G$, $t \mapsto (t,\varphi(t))$ mit der Abbildung F. Mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir die Äquivalenz

$$h'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (F \circ u)'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F'(u(t)) \cdot u'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \partial_1 F(u(t)) & \partial_2 F(u(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t,\varphi(t)) + g(t,\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(t) = -\frac{f(t,\varphi(t))}{g(t,\varphi(t))}.$$

Es gilt also $h'(t) = 0$ für alle $t \in I$ genau dann, wenn φ eine Lösung der DGL $y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ darstellt. □

Wir betrachten als Beispiel die DGL $y' = -\frac{x}{y}$, gegeben durch die Funktionen $f(x,y) = x$ und $g(x,y) = y$ auf dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Die Bedingung $\partial_2 f = \partial_1 g$ ist auf G erfüllt, denn die beiden partiellen Ableitungen sind gleich null. Man überprüft auch leicht, dass durch $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ eine Stammfunktion von (f,g) auf G definiert ist. Eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma : I \to \mathbb{R}^+$ ist also genau dann eine Lösung der DGL, wenn ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $t^2 + \gamma(t)^2 = r^2$ für alle $t \in I$ existiert. Dies sind genau die Funktionen der Form $\gamma(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$, also genau diejenigen, deren Graph in der oberen Hälfte eines Kreises mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung verläuft.

Definition 2.9 Eine Funktion $\mu : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird ***integrierender Faktor*** eines Paares (f,g) von stetigen reellwertigen Funktionen f,g auf G genannt, wenn für $(\mu f, \mu g)$ eine Stammfunktion existiert.

Im Allgemeinen kann es schwierig sein, einen integrierenden Faktor für ein gegebenes Paar (f,g) zu finden, aber in einigen Situationen lässt sich eine solche Funktion erraten. Als Beispiel betrachten wir die DGL

$$y' \quad = \quad \frac{y^2 - 3xy - 2x^2}{x^2 - xy}$$

gegeben durch das Paar (f,g) von Funktionen $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2$ und $g(x,y) = x^2 - xy$ auf dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$. Für dieses Paar existiert keine Stammfunktion, denn wegen $\partial_2 f(x,y) = 3x - 2y$

und $\partial_1 g(x,y) = 2x - y$ gilt $\partial_2 f(x,y) \neq \partial_1 g(x,y)$. Wir benötigen eine Funktion $\mu : G \to \mathbb{R}$ mit $\partial_1(\mu g)(x,y) = \partial_2(\mu f)(x,y)$, was äquivalent ist zu

$$(\partial_1\mu)(x,y)(x^2 - xy) + \mu(x,y)(2x - y) \quad = \quad (\partial_2\mu)(x,y)(2x^2 + 3xy - y^2) + \mu(x,y)(3x - 2y).$$

Diese Gleichung wird durch $\mu(x,y) = x$ erfüllt, denn dann steht auf der linken Seite $1 \cdot (x^2 - xy) + x(2x - y) = x^2 - xy + 2x^2 - xy = 3x^2 - 2xy$, und auf der rechten Seite ebenso $0 \cdot (2x^2 + 3xy - y^2) + x(3x - 2y) = 3x^2 - 2xy$. Die Stammfunktion F ermitteln wir, indem wir die gemischten Terme von $(xf)(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - xy^2$ und $(xg)(x,y) = x^3 - x^2y$ bezüglich x bzw. y integrieren. Demnach muss F die Form $F(x,y) = x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 + C(x)$ haben, mit einer noch zu bestimmenden Funktion C. Es muss $3x^2y - xy^2 + C'(x) = (\partial_1 F)(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - xy^2$ gelten, also $C'(x) = 2x^3$. Tatsächlich liefert $C(x) = \frac{1}{2}x^4$ eine Stammfunktion, denn setzen wir

$$F(x,y) \quad = \quad x^3y - \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{2}x^4 \quad ,$$

dann gilt $(\partial_1 F)(x,y) = (xf)(x,y)$ und $(\partial_2 F)(x,y) = (xg)(x,y)$.

§ 3. *Systeme linearer Differenzialgleichungen*

Zusammenfassung. Ein System linearer DGLS ist ein System, dass sich in der Form $y' = A(x)y + b(x)$ schreiben lässt, wobei A eine matrix- und b eine vektorwertige Funktion auf einem offenen Intervall bezeichnet. Auch die Lösungen sind dann auf diesem Intervall definiert. Im Fall eines homogenen Systems ($b = 0$) bilden sie einen Untervektorraum, sonst einen affinen Unterraum im $\mathbb{R}$-Vektorraum aller vektorwertigen Funktionen auf I. Wir zeigen, dass der Lösungsraum im homogenen Fall endlich-dimensional ist und beweisen ein allgemeines Kriterium, mit dem sich eine Basis des Lösungsraums als solche erkennen lässt. Wenn die matrixwertige Funktion A auf dem Intervall I konstant ist, lassen sich die Lösungen direkt in geschlossener Form angeben. Um die Lösungsformeln herzuleiten, müssen wir auf die Ergebnisse der Linearen Algebra zurückgreifen, insbesondere auf die Eigenwerttheorie und die Jordansche Normalform.

Wichtige Grundbegriffe

- homogone und inhomogene lineare Systeme von DGL ($\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-wertig)
- Fundamentalsystem von Lösungen
- homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Abbildung von I in den Raum der reellen $n \times n$-Matrizen. Sei $b : I \to \mathbb{R}^n$ eine weitere stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' \quad = \quad A(x)y + b(x)$$

ein ***lineares System*** von Differentialgleichungen. Ist die Funktion b konstant Null, dann spricht man von einem ***homogenen***, sonst von einem ***inhomogenen*** System.

Neben diesen reellwertigen betrachtet man häufig auch ***komplexwertige*** lineare Systeme von Differentialgleichungen. Dabei werden A und b durch Abbildungen nach $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ersetzt. Der Definitionsbereich der Funktionen ist aber weiterhin ein Intervall in den reellen Zahlen. Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Für lineare Systeme von Differentialgleichungen nimmt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz die folgende Form an.

Satz 3.2 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ des Systems $y' = A(x)y + b(x)$ mit $\varphi(a) = c$.

Beweis: Sei die Funktion $f : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $f(x,y) = A(x)y + b(x)$ auf $I \times \mathbb{K}^n$. Ist $K \subseteq I$ ein kompaktes Teilintervall, dann ist

$$L \quad = \quad \sup\{\|A(x)\| \mid x \in K\}$$

endlich, wobei $\|A(x)\|$ jeweils die in der Analysis mehrerer Variablen eingeführte ***Operatornorm*** bezeichnet. Für alle $x \in K$ und $y, z \in \mathbb{K}^n$ gilt dann

$$\|f(x,y)-f(x,z)\| \quad = \quad \|A(x)(y-z)\| \quad \leq \quad L\|y-z\|.$$

Also genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung, und somit gibt es nach Satz 1.10 ein eindeutig bestimmtes, maximales offenes Intervall $J \subseteq K$ mit $a \in J$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : J \to \mathbb{K}^n$ mit $\varphi(a) = c$.

Nehmen wir nun an, dass $\sup J < \sup K$ gilt. Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $L\delta < 1$ und $\sup J + \delta < \sup K$ gilt. Sei außerdem $a_1 \in J$ ein Punkt mit $a_1 + \delta > \sup J$. Wie im Beweis von Satz 1.9 gezeigt wurde, existiert eine Lösung ψ auf $I_\delta =]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$ mit $\psi(a_1) = \varphi(a_1)$. Auf Grund der Eindeutigkeit in Folge der Lipschitz-Bedingung stimmen φ und ψ auf $J \cap I_\delta$ überein. Wir erhalten also insgesamt eine Lösung, die auf $J \cup I_\delta$ definiert ist, was der Maximalität der Lösung φ auf J widerspricht. Also muss $\sup J = \sup K$ gelten. Ebenso beweist man $\inf J = \inf K$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Lösung φ auf das Innere jedes kompakten Teilintervalls $K \subseteq I$ fortgesetzt werden kann. Damit ist φ auf ganz I fortsetzbar. □

Nun sehen wir uns die Gesamtheit der Lösungen eines homogenen linearen Systems genauer an.

Satz 3.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{L}_0$ die Menge aller Lösungen von $y' = A(x)y$ auf dem Intervall I. Dann ist $\mathcal{L}_0$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist $m \in \mathbb{N}$, dann sind für ein m-Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ von Lösungen die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ sind linear unabhängig.

(ii) Es gibt ein $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

(iii) Für alle $a \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass es sich bei $\mathcal{L}_0$ tatsächlich um einen $\mathbb{K}$-Vektorraum handelt. Die Nullfunktion $0 : I \to \mathbb{K}^n$ erfüllt offensichtlich die Gleichung $0' = A(x)0$, also ist 0 in $\mathcal{L}_0$ enthalten. Seien nun $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Dann liegen auch $\varphi + \psi$ und $\lambda\varphi$ in $\mathcal{L}_0$, denn für alle $x \in I$ gilt

$$(\varphi+\psi)'(x) \quad = \quad \varphi'(x)+\psi'(x) \quad = \quad A(x)\varphi(x)+A(x)\psi(x) \quad = \quad A(x)(\varphi+\psi)(x)$$

und $(\lambda\varphi)'(x) = \lambda\varphi'(x) = \lambda A(x)\varphi(x) = A(x)(\lambda\varphi)(x)$.

Nun beweisen wir die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iii). Die Implikation “(iii) ⇒ (ii)“ ist offensichtlich. Zum Beweis von “(ii) ⇒ (i)“ seien $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k = 0$ vorgegeben. Dann gilt insbesondere

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(a) \quad = \quad 0 \quad ,$$

und auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ bewiesen. Nun zeigen wir noch “(i) ⇒ (iii)“. Angenommen, es gibt ein $a \in I$, so dass die Vektoren $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_m(a)$ linear abhängig sind. Dann gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich Null, mit

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(a) \quad = \quad 0.$$

Sei nun $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k \in \mathcal{L}_0$. Dann gilt $\varphi(a) = 0$. Nach Satz 3.2 besitzt das System $y' = A(x)y$ nur eine Lösung ψ mit $\psi(a) = 0$, und das ist die Nullfunktion. Also folgt $\varphi = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ linear unabhängig sind.

Es bleibt zu zeigen, dass $\dim \mathcal{L}_0 = n$ gilt. Seien dazu $e_1, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$, und sei $a \in I$ beliebig gewählt. Für $1 \leq k \leq n$ sei $\varphi_k \in \mathcal{L}_0$ das eindeutig bestimmte Element des Lösungsraums mit $\varphi_k(a) = e_k$. Weil die Vektoren $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a)$ linear unabhängig sind, gilt auf Grund der Implikation "(ii) $\Rightarrow$ (i)" dasselbe auch für die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Daraus folgt zunächst $\dim \mathcal{L}_0 \geq n$. Nehmen wir nun an, dass $\dim \mathcal{L}_0 > n$ gilt. Dann gibt es $n+1$ linear unabhängige Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}$ in $\mathcal{L}_0$. Wegen "(i) $\Rightarrow$ (iii)" wären dann auch die Vektoren $\psi_1(a), \ldots, \psi_{n+1}(a) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig. Aber dies ist wegen $\dim \mathbb{K}^n = n$ unmöglich. □

Jedes Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ von Elementen aus $\mathcal{L}_0$ kann mit einer Funktion $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ identifiziert werden, bei der $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a)$ für jedes $a \in I$ jeweils die Spalten der Matrix $\Phi(a)$ sind. Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bilden nach Satz 3.3 genau dann eine Basis von $\mathcal{L}_0$, wenn $\det \Phi(a) \neq 0$ gilt. Ist dies erfüllt, dann bezeichnet man Φ als ein ***Fundamentalsystem von Lösungen*** des linearen Systems. Durch Vergleich der einzelnen Spalten sieht man, dass

$$\Phi'(x) \quad = \quad A(x)\Phi(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in I$$

gilt, wobei die Matrix $\Phi'(x)$ durch Differentiation der einzelnen Einträge von $\Phi(x)$ zu Stande kommt.

Als Beispiel betrachten wir für eine beliebige Konstante $\omega \in \mathbb{R}^+$ das lineare System von DGL gegeben durch $y_1' = -\omega y_2$ und $y_2' = \omega y_1$. In Matrixschreibweise ist dies $y' = A(x)y$ mit der konstanten Funktion

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} \quad , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch $\varphi_1(x) = (\cos(\omega x), \sin(\omega x))$ und $\varphi_2(x) = (-\sin(\omega x), \cos(\omega x))$ sind zwei spezielle Lösungen des Systems gegeben. Denn einerseits gilt $\varphi_1'(x) = (-\omega \sin(\omega x), \omega \cos(\omega x))$ und $\varphi_2'(x) = (-\omega \cos(\omega x), -\omega \sin(\omega x))$, andererseits aber auch

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega x) \\ \omega \cos(\omega x) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cos(\omega x) \\ -\omega \sin(\omega x) \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$\Phi(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \\ \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen, denn $\Phi(0)$ ist die Einheitsmatrix mit $\det \Phi(0) = 1 \neq 0$.

Nun wenden wir uns den Lösungsmengen der ***inhomogenen*** linearen Systeme zu.

Satz 3.4 Sei $y' = A(x)y + b(x)$ eine inhomogene lineare DGL, $\mathcal{L}$ die Menge ihrer Lösungen und $\mathcal{L}_0$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Lösungen von $y' = A(x)y$. Ist $\psi_0 : I \to \mathbb{K}^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, dann gilt $\mathcal{L} = \psi_0 + \mathcal{L}_0$.

Beweis: "$\subseteq$" Sei $\psi \in \mathcal{L}$ und $\varphi = \psi - \psi_0$. Dann gilt für alle $x \in I$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \psi'(x) - \psi_0'(x) = (A(x)\psi(x) + b(x)) - (A(x)\psi_0(x) + b(x)) \\ &= A(x)(\psi - \psi_0)(x) = A(x)\varphi(x). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\varphi \in \mathcal{L}_0$ enthalten ist, und folglich gilt $\psi = \psi_0 + \varphi \in \psi_0 + \mathcal{L}_0$.

"$\supseteq$" Sei $\psi \in \psi_0 + \mathcal{L}_0$, also $\psi = \psi_0 + \varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{L}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= (\psi_0 + \varphi)'(x) = \psi_0'(x) + \varphi'(x) = A(x)\psi_0(x) + b(x) + A(x)\varphi(x) \\ &= A(x)(\psi_0 + \varphi)(x) + b(x) = A(x)\psi(x) + b(x) \end{aligned}$$

und folglich $\psi \in \mathcal{L}$. □

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern.

Satz 3.5 Sei $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes lineares System von Differentialgleichungen und Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Dann erhält man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) \quad \text{mit} \quad u(x) = \int_a^x \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt.$$

Beweis: Aus $\psi(x) = \Phi(x)u(x)$ und $u'(x) = \Phi^{-1}(x)b(x)$ für alle $x \in I$ folgt

$$\psi'(x) = \Phi'(x)u(x) + \Phi(x)u'(x) = \Phi'(x)u(x) + \Phi(x)\Phi(x)^{-1}b(x) =$$

$$\Phi'(x)u(x) + b(x) = A(x)\Phi(x)u(x) + b(x) = A(x)\psi(x) + b(x).$$ □

Als Beispiel betrachten wir das System linearer Differentialgleichungen gegeben durch $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1 + x$. In Matrixschreibweise entspricht dies der Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Wie wir im vorherigen Beispiel gesehen haben, ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL $y' = A(x)y$. Es gilt

$$\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x). \end{pmatrix}$$

Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu erhalten, berechnen wir zunächst

$$u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt = \int_0^x \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

Wir bestimmen die beiden Komponenten von $u(x)$ durch partielle Integration. Es gilt

$$\int_0^x t\sin(t)\,dt = -t\cos(t)\Big|_0^x + \int_0^x \cos(t)\,dt = -t\cos(t) + \sin(t)\Big|_0^x = \sin(x) - x\cos(x)$$

und

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt = t\sin(t)\Big|_0^x - \int_0^x \sin(t)\,dt = t\sin(t) + \cos(t)\Big|_0^x = x\sin(x) + \cos(x) - 1.$$

Wir erhalten somit

$$u(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) - x\cos(x) \\ \cos(x) + x\sin(x) - 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(x) - x\cos(x) \\ \cos(x) + x\sin(x) - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x)(\sin(x) - x\cos(x)) - \sin(x)(\cos(x) + x\sin(x) - 1) \\ \sin(x)(\sin(x) - x\cos(x)) + \cos(x)(\cos(x) + x\sin(x) - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \sin(x) \\ 1 - \cos(x) \end{pmatrix}$$

Wir formulieren die bisher erzielten Ergebnisse noch einmal für Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Definition 3.6 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $a_k : I \to \mathbb{K}$ für $0 \le k < n$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{3.1}$$

eine ***lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung***. Diese wird als ***homogen*** bezeichnet, wenn $b = 0$ ist, ansonsten als ***inhomogen***.

Satz 3.7 Gegeben sei eine lineare DGL n-ter Ordnung der Form (3.1). Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der homogenen linearen DGL ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein System $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ von Lösungen der homogenen DGL ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $x \in I$ die sogenannte ***Wronski-Determinante***

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \text{ungleich Null ist.}$$

Man nennt $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ in diesem Fall ein ***Fundamentalsystem*** von Lösungen der homogenen linearen DGL.

Beweis: Seien $\hat{\mathcal{L}}$ die Lösungen des homogenen Systems linearer Differentialgleichungen gegeben durch

$$y_0' = y_1 \quad , \quad y_1' = y_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad y_{n-2}' = y_{n-1} \quad , \quad y_{n-1}' = -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \ldots - a_{n-1}(x)y_{n-1}.$$

Wie wir in § 1 gesehen haben, ist durch $\varphi \mapsto (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Bijektion $\mathcal{L} \to \hat{\mathcal{L}}$ gegeben, und diese ist verträglich mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation von Funktionen. Die Wronski-Determinante $W(x)$ verschwindet genau dann in einem Punkt $x \in I$, wenn die Bilder von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ unter dem Vektorraum-Isomorphismus $\mathcal{L} \to \hat{\mathcal{L}}$ linear unabhängig sind. Damit ergeben sich alle Aussagen unmittelbar aus Satz 3.3. □

Als wichtigen Spezialfall der Theorie betrachten wir von nun lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zur Vorbereitung wiederholen wir einige Grundlagen aus der Linearen Algebra. Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen $v \in \mathbb{K}^n$ als ***Eigenvektor*** der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ und $Av = \lambda v$ gilt. Die Eigenvektoren bilden zusammen mit dem Nullvektor den ***Eigenraum*** zum Eigenwert λ, der durch $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E)$ gegeben ist, wobei $E \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Das ***charakteristische Polynom*** der Matrix A ist definiert durch $\chi_A = \det(xE - A) \in \mathbb{K}[x]$. Es wurde gezeigt, dass die Eigenwerte von A mit den Nullstellen des Polynoms χ_A in $\mathbb{K}$ übereinstimmen.

Die Matrix A wird als ***diagonalisierbar*** bezeichnet, wenn eine Diagonalmatrix $D \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $D = TAT^{-1}$ existieren. Eine äquivalente Bedingung lautet, dass eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A existiert. Außerdem haben wir in der Linearen Algebra das folgende ***Diagonalisierbarkeitskriterium*** kennengelernt: Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Polynom χ_A in $\mathbb{K}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt. Dabei war die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{K}$ definiert als die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_A, und die geometrische Vielfachheit war die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

Satz 3.8 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, eine $\mathbb{C}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto e^{\lambda t} v$ ist genau dann eine Lösung des Systems $y' = Ay$ ungleich null, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(ii) Ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ ein Tupel komplexer Zahlen und $(v_1, \ldots, v_r)$ ein Tupel von Vektoren, wobei v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j bezeichnet, so ist das Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ von Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig ist.

(iii) Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die komplexen Zahlen λ_j alle verschieden sind.

Beweis: zu (i) Dass φ eine Lösung von $y' = Ay$ ist, ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Gleichung $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$ ist dies gleichbedeutend mit $\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weil die Funktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ nirgends null wird, ist diese Gleichung wiederum äquivalent zu $\lambda v = Av$ und somit zu der Aussage, dass $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

zu (ii) Es gilt $\varphi_j(0) = v_j$ für $1 \leq v_j \leq n$. Damit ergibt sich die Aussage unmittelbar aus Satz 3.3.

zu (iii) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ein System von Eigenvektoren zu lauter verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig ist. □

Proposition 3.9 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B = TAT^{-1}$. Genau dann ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$, wenn $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\psi(t) = T\varphi(t)$ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

Beweis: Ist φ eine Lösung von $y' = Ay$, dann gilt $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt dann $\psi'(t) = T\varphi'(t) = TA\varphi(t) = TAT^{-1}(T\varphi(t)) = B\psi(t)$. Somit ist ψ eine Lösung von $z' = Bz$. Der Beweis der Umkehrung läuft vollkommen analog. □

Auf der Grundlage von Satz 3.8 lässt sich für eine DGL $y' = Ay$ mit $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen direkt angeben, falls es sich bei A um eine *diagonalisierbare* Matrix handelt. In diesem Fall existiert eine Basis $(v_1, ..., v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren der Matrix A. Bezeichnet $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jeweils den Eigenwert zum Eigenvektor v_j, so ist $\Phi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ bestehend aus den Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Wir betrachten als Beispiel das linearen System von DGLs gegeben durch

$$\begin{array}{rclcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 2y_2 & & \\ y_2' & = & 2y_1 & & & - & y_3 \\ y_3' & = & 4y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 \end{array}$$

In Kurzform handelt es sich um das System $y' = Ay$ mit der Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist gegeben durch $\chi_A = x^3 + x - 2$. Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstelle 1, und Polynomdivision liefert die Zerlegung $\chi_A = (x-1)(x^2 + x + 2)$. Mit der p-q-Formel, angewendet auf den Fraktor vom Grad 2, erhält man die beiden weiteren Nullstellen $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 4 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{7}$. Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt man die zugehörigen Eigenvektoren.

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - E) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}) &= \ker(A - (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7})E) = \ker\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} \end{pmatrix} \\ &= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} i\sqrt{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}) &= \ker(A - (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7})E) = \ker\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} \end{pmatrix} \\ &= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} i\sqrt{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 - i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Das Tupel $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ gegeben durch

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_2(t) = e^{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 3+i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_3(t) = e^{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 3-i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

bildet also ein Fundamentalsystem von $\mathbb{C}$-wertigen Lösungen. Da das vorgegebene System von Differenzialgleichungen aber reell ist, interessiert man sich (zum Beispiel im Rahmen physikalischer Anwendungen) in erster Linie für reellwertige Lösungen. Die folgende Proposition zeigt, wie $\mathbb{C}$-wertige Lösungen in $\mathbb{R}$-wertige umgerechet werden können.

Proposition 3.10 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, eine $\mathbb{R}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $\lambda = \nu + i\omega$ mit $\nu, \omega \in \mathbb{R}$, und ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, $v = u + iw$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $\bar{\lambda} = \nu - i\omega$ ein Eigenwert von A, und $\bar{v} = u - iw$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) In diesem Fall sind $\psi, \xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(t) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w) \quad \text{und} \quad \xi(t) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

zwei linear unabhängige Lösungen der DGL.

Beweis: zu (i) Dass mit λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert ist, folgt aus der bekannten Tatsache, dass die nicht-reellen Nullstellen eines reellen Polynoms stets in konjugiert-komplexen Paaren auftreten, angewendet auf $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$. Weil die komplexe Konjugation mit der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen verträglich ist, ist sie auch verträglich mit der Matrix-Vektor-Multiplikation und der Multiplikation von Matrizen. Dass $\bar{v}$ ein zu $\bar{\lambda}$ gehörender Eigenvektor ist, ergibt sich durch komponentenweise Anwendung der komplexen Konjugation auf die Gleichung $Av = \lambda v$. Man erhält auf diese Weise

$$A(u - iw) \quad = \quad A\bar{v} \quad = \quad \bar{A}\bar{v} \quad = \quad \overline{Av} \quad = \quad \overline{\lambda v} \quad = \quad \bar{\lambda} \cdot \bar{v} \quad = \quad \bar{\lambda} \cdot (u - iw).$$

zu (ii) Nach Satz 3.8 sind durch $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ und $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$ zwei linear unabhängige, $\mathbb{C}$-wertige Lösungen des Systems gegeben. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\varphi(t) \quad = \quad e^{(\nu + i\omega)t}(u + iw) \quad = \quad e^{\nu t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))(u + iw) \quad = \\ e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w) + ie^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

und entsprechend

$$\bar{\varphi}(t) \quad = \quad e^{(\nu - i\omega)t}(u - iw) \quad = \quad e^{\nu t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))(u - iw) \quad = \\ e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w) - ie^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w).$$

Durch Bildung von Linearkombinationen erhält man die beiden Lösungen $\psi(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w)$ und $\xi(t) = \frac{1}{2i}(\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$. Weil die Matrix des Basiswechsels von $(\varphi, \bar{\varphi})$ zu (ψ, ξ) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

eine Determinante ungleich null hat, ist auch das Paar (ψ, ξ) linear unabhängig. □

Folgerung 3.11 Ist $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_p$ und Paaren $(\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}), ..., (\lambda_{p+q}, \bar{\lambda}_{p+q})$ nicht-reeller, komplex- konjugierter Eigenwerte, mit $n = p + 2q$, $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, $\nu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq q$, dann ist durch $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ sowie

$$\psi_j(t) = e^{\nu_j t}(\cos(\omega_j t)u_j - \sin(\omega_j t)w_j) \quad \text{und} \quad \xi_j(t) = e^{\nu_j t}(\sin(\omega_j t)u_j + \cos(\omega t)w_j)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben. Dabei bezeichnet v_j für $1 \leq j \leq p$ jeweils einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, und $v_j = u_j + iw_j$ für $1 \leq j \leq q$ jeweils einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j = nu_j + i\omega_j$.

Beweis: Aus Satz 3.8 folgt, dass die Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ und $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, $\bar{\varphi}_j(t) = e^{\bar{\lambda}_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq q$ zusammen ein n-elementiges linear unabhängiges System von Lösungen bilden. Da unser LGS $y' = Ay$ von Dimension n ist, handelt es sich somit um ein Fundamentalsystem von Lösungen. Wie wir im Beweis von Teil (ii) von Proposition 3.10 festgestellt haben, spannt das Paar $(\varphi_j, \bar{\varphi}_j)$ jeweils denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum auf wie (ψ_j, ξ_j), für $1 \leq j \leq q$. Daraus folgt, dass die Funktionen φ_j für $1 \leq j \leq p$ und ψ_j, ξ_j für $1 \leq j \leq q$ ein Fundamentalsystem von Lösungen im Komplexen bilden und insbesondere $\mathbb{C}$-linear unabhängig ist. Damit sind sie erst recht $\mathbb{R}$-linear unabhängig, d.h. auch im Reellen bilden die Lösungen ein Fundamentalsystem. □

Das System aus dem Beispiel von oben hat also ein reellwertiges Fundamentalsystem bestehend aus den Funktionen

$$\varphi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 3\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) - \sqrt{7}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 4\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 8\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \end{pmatrix} \quad , \quad \xi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 3\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) + \sqrt{7}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 4\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 8\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \end{pmatrix}.$$

Natürlich lassen sich die Lösungen durch die übliche Proberechnung bestätigen. Die Ableitungen der Komponenten der drei Lösungen sind gegeben durch

$$\varphi_1'(t) = e^t, \quad \varphi_2'(t) = 0, \quad \varphi_3'(t) = 0$$

$$\psi_1'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + (-1)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)), \quad \psi_2'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + (-2)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)),$$
$$\psi_3'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + (-4)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))$$

$$\xi_1'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + \sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)), \quad \xi_2'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + 2\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)),$$
$$\xi_3'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + 4\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))$$

Dass die erste Lösung φ das System erfüllt, zeigt sich durch die Rechnung

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi_1(t) - 2\varphi_2(t) & = & e^t - 2 \cdot 0 & = & e^t & = & e^t & = & \varphi_1'(t) \quad , \\ 2\varphi_1(t) - \varphi_3(t) & = & 2e^t - 2 \cdot e^t & = & 0 & = & \varphi_2'(t) \quad , \\ 4\varphi_1(t) - 2\varphi_2(t) - \varphi_3(t) & = & 4 \cdot e^t - 2 \cdot 0 - 2e^t & = & 2e^t & = & \varphi_3'(t). \end{array}$$

Die Lösung ψ wird bestätigt durch

$$\begin{aligned}\psi_1(t)-2\psi_2(t) &= e^{-\frac{1}{2}t}(3\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) &=\\ && e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+(-1)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) = \psi_1'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\psi_1(t)-\psi_3(t) &= 2e^{-\frac{1}{2}t}(3\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-e^{-\frac{1}{2}t}8\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) &=\\ && e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+(-2)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) = \psi_2'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\psi_1(t)-2\psi_2(t)-\psi_3(t) &= 4e^{-\frac{1}{2}t}(3\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-e^{-\frac{1}{2}t}8\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) &=\\ && e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+(-4)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) = \psi_3'(t)\end{aligned}$$

und die dritte Lösung ξ durch

$$\begin{aligned}\xi_1(t)-2\xi_2(t) &= e^{-\frac{1}{2}t}(3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) &=\\ && e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) = \xi_1'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\xi_1(t)-\xi_3(t) &= 2e^{-\frac{1}{2}t}(3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-e^{-\frac{1}{2}t}8\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) &=\\ && e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+2\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) = \xi_2'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\xi_1(t)-2\xi_2(t)-\xi_3(t) &= 4e^{-\frac{1}{2}t}(3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-e^{-\frac{1}{2}t}8\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) &=\\ && e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+4\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) = \xi_3'(t).\end{aligned}$$

Zum Abschluss betrachten wir nun Systeme linearer Differenzialgleichungen $y' = Ay$ mit nicht-diagonalisierbarer Koeffizientenmatrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Hierfür benötigen wir wiederum einige technische Vorbereitungen. Bereits in der Analysis einer Variablen haben wir auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ der reellen $n \times n$-Matrizen die sog. ***Zeilensummennorm*** betrachtet. Diese lässt sich in der Form

$$\|A\| \quad = \quad \max\left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \;\middle|\; 1 \le i \le n \right\}$$

auf $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ übertragen; beim Nachweis der Normeigenschaften ergeben sich kenerlei Änderungen. Wie die Zeilensummennorm im Reellen handelt es sich auch bei dieser Norm um eine *Operatornorm*, wenn man jedes $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ jeweils mit der linearen Abbildung $\phi_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto Av$ identifiziert und man auf $\mathbb{C}^n$ die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gegeben durch $\|v\|_\infty = \max\{|v_k| \mid 1 \le k \le n\}$ zu Grunde legt. Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ gilt also

$$\|A\| \quad = \quad \sup\{\, \|\phi_A(v)\|_\infty \;\middle|\; v \in \mathbb{C}^n \; \|v\|_\infty = 1 \,\}.$$

Für uns ist dies vor allem deshalb relevant, weil daraus die Ungleichung $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ folgt. Tatsächlich gilt für jeden Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\|_\infty = 1$ die Abschätzung $\|ABv\|_\infty \le \|A\|\|Bv\|_\infty \le \|A\|\|B\|$, so dass man die behauptete Ungleichung unmittelbar durch Übergang zum Supremum über alle Vektoren mit Länge 1 erhält.

Bereits in der Linearen Algebra haben wir gesehen, dass sich Matrizen problemlos in Polynome einsetzen lassen. Ist $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, dann definiert man $f(A) = a_0E + a_1A + \ldots + a_nA^n$. Mit Hilfe der Zeilensummennorm können wir nun auch Einsetzen von Matrizen in Potenzreihen sinnvoll definieren.

Proposition 3.12 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine komplexe Potenzreihe vom Konvergenzradius $r \in \mathcal{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\|A\| < r$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

im $\mathbb{C}$-Vektorram $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bezüglich der Zeilensummennorm. (Wie schon bei den reellen und komplexen Zahlen bedeutet Konvergenz, dass die Folge der Partialsummen der Reihe konvergiert.)

Beweis: In der Analysis mehrerer Variablen wurde gezeigt, dass jeder endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum vollständig ist. Dasselbe git auch für jeden endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum; beim Beweis ergeben sich keinerlei Änderungen. Es genügt deshalb zu zeigen, dass die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ der Reihe eine Cauchyfolge in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bilden. Mit Hilfe der oben erwähnten Ungleichung $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ für alle $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ zeigt man leicht durch vollständige Induktion, dass $\|A^k\| \le \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Nach Definition des Konvergenzradius ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\|A\|^n$ konvergent. Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\|A\|^k < \varepsilon$ für $n \ge m \ge N$ erfüllt ist. Damit erhalten wir

$$\|s_n - s_m\| \quad = \quad \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k A^k \right\| \quad \le \quad \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \, \|A^k\| \quad \le \quad \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \, \|A\|^k \quad < \quad \varepsilon \quad ,$$

wodurch die Cauchyfolgen-Eigenschaft nachgewiesen ist. □

Da die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ bekanntlich einen unendlichen Konvergenzradius besitzt, ist die ***Exponentialmatrix***

$$e^A \quad = \quad \exp(A) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

für alle $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ wohldefiniert. Unser nächstes Ziel besteht darin, die Exponentialmatrix e^{tJ} für $t \in \mathbb{R}$ und Jordanmatrizen J explizit auszurechnen. Die Jordanmatrizen hatten wir am Ende der Linearen Algebra-Vorlesung definiert. Es handelt sich dabei um Matrizen der Form

$$J \quad = \quad \lambda E_n + F_n \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, wobei $E_n \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ die Einheitsmatrix und $F_n = (f_{ij})$ die Matrix in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit den Einträgen $f_{i,i+1} = 1$ für $1 \le i < n$ und $f_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $j \ne i + 1$ bezeichnet. Wenn die Größe n der Matrizen keine wichtige Rolle spielt, lassen wir den Index n auch weg und schreibe E, F statt E_n, F_n.

Lemma 3.13 Sei $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = \lambda E + F$. Dann gilt

$$e^{tJ} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} t^{n-3} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Zu zeigen ist, dass die Matrix e^{tJ} auf der k-ten Nebendiagonale durchgehend den Eintrag $\frac{1}{k!}t^{k-1}e^{\lambda t}$ aufweist, für $0 \le k \le n-1$, wobei wir die Hauptdiagonale als 0-te Nebendiagonale ansehen. Wie man leicht überprüft, hat die Matrix F^m für $0 \le m \le n-1$ auf der m-ten Nebendiagonalen durchgehend Einsen, während alle übrigen Einträge gleich null sind. Für $m \ge n$ ist F^m die Nullmatrix. Nun bestimmen wir J^m für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Eine einfache Rechnung analog zum Beweis des Binomischen Lehrsatzes ergibt

$$J^m \quad = \quad (\lambda E + F)^m \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} F^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} F^k$$

Der Eintrag von J^m auf der k-ten Nebendiagonale ist also gleich $\binom{m}{k}\lambda^{m-k}$, falls $m \ge k$ ist, und ansonsten gleich null, jeweils für $0 \le k \le n-1$. Der Eintrag von $\frac{1}{m!}(tJ)^m$ auf der k-ten Nebendiagonale ergibt sich damit im Fall $m \ge k$ zu $\frac{1}{(m-k)!k!}(\lambda t)^{m-k}t^k$, und für e^{tJ} erhalten wir auf der k-ten Nebendiagonalen wie angegeben

$$\sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!k!}(\lambda t)^{m-k} t^k \quad = \quad \frac{t^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!}(\lambda t)^{m-k} \quad = \quad \frac{t^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m \quad = \quad \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}. \qquad \square$$

Folgerung 3.14 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann ist $\Phi(t) = e^{tJ}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für das System $y' = Ay$.

Beweis: Sind $A, B : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ matrix-wertige Funktionen auf einem offenen Intervall, dann bleiben, wie man leicht überprüft, Summen- und Produktregel aus der Analysis einer Variablen für die Addition und die Multiplikation von Matrizen unverändert gültig. Es gilt also $(A+B)'(t) = A(t) + B(t)$ und $(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$ für alle $t \in I$, wobei die $A'(t)$ und $B'(t)$ jeweils die Matrizen mit den Einträgen $a'_{ij}(t)$, $b'_{ij}(t)$ für $1 \le i, j \le n$ bezeichnen.

Bezeichnet nun $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ ein beliebiges Polynom, dann ist die Ableitung von $\mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $t \mapsto f(tA)$ gegeben durch $t \mapsto Af'(tA)$, wobei $f' = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$ für die formale Ableitung des Polynoms f steht. Denn vollständige Induktion in Verbindung mit der Produktregel liefert für die Ableitung von $t \mapsto (tA)^m$ und alle $m \in \mathbb{N}$ den Ausdruck $mt^{m-1}A^{m-1}$. Damit wiederum erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(tA)) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d}{dt}\left((tA)^k\right) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} A^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1} t^k A^{k+1} \\ &= \quad A \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(tA)^k \quad = \quad Af'(tA). \end{aligned}$$

Auf Grund der Vertauschbarkeit von Grenzübergang mit Differentiation bei Potenzreihen ist diese Formel für die Ableitung von $t \mapsto f(tA)$ auch dann gültig, wenn es sich bei f nicht um ein komplexes Polynom, sondern um eine komplexe Potenzreihe handelt, wobei f' dann die formale Ableitung der Potenzreihe bezeichnet. (An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, dass sich der Konvergenzradius durch Übergang zur formalen Ableitung nicht ändert.) Da die Exponentialreihe mit ihrer eigenen formalen Ableitung übereinstimmt, erhalten wir

$$\Phi'(t) \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) \quad = \quad A\exp'(tA) \quad = \quad Ae^{tA} \quad = \quad A\Phi(t).$$

Dies zeigt, dass durch Φ eine Lösung des Systems $y' = Ay$ gegeben ist. Es bleibt zu zeigen, dass es sich bei Φ um ein Fundamentalsystem handelt, die Matrix $\Phi(t)$ also für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist. In der Linearen Algebra wurde gezeigt, dass jede komplexe $n \times n$-Matrix ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform ist. Es gibt also ein Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und Jordanmatrizen $J_1, ..., J_r$, so dass TAT^{-1} mit der Blockmatrix

$$J \quad = \quad \mathrm{diag}(J_1, ..., J_r) \quad = \quad \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

übereinstimmt. Wie man unmittelbar überprüft, ist durch $t \mapsto e^{tJ} = \mathrm{diag}(e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_r})$ eine Lösung des Systems $y' = Jy$ gegeben. Es handelt sich dabei um ein Fundamentalsystem, denn die Matrix e^{tJ} ist eine obere Dreiecksmatrix, mit nichtverschwindenden Diagonaleinträgen, und damit invertierbar. Nach Proposition 3.9 ist $t \mapsto T^{-1}e^{tJ}$ eine Lösung von $y' = Ay$, und mit e^{tJ} ist auch $T^{-1}e^{tJ}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine invertierbare Matrix. □

Die Gültigkeit der Gleichung $(e^{tJ})' = Je^{tJ}$ lässt sich für den Fall, dass $J \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Jordanmatrix ist, mit Hilfe von Lemma 3.13 auch durch eine direkte Rechnung überprüfen. Wir können nun den zentralen Satz über die Lösung von linearen Systemen von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten formulieren.

Satz 3.15 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Matrix, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $r \in \mathbb{N}$ dessen algebraische Vielfachheit. Dann gibt es für das System $y' = Ay$ ein linear unabhängiges Tupel

$$(\varphi_0, ..., \varphi_{r-1})$$

von Lösungen der Form $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, wobei die Funktion $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ in jeder Komponente ein Polynom vom Grad $\leq k$ ist.

Beweis: Für den Fall, dass es sich bei A um eine Jordanmatrix handelt, ist die Aussage offenbar erfüllt, denn die Einträge der n Spalten der Matrix in Lemma 3.13 bestehen aus Polynomen vom Grad 0, 1, ..., $n-1$, multipliziert mit $e^{\lambda t}$. Ebenso gilt die Aussage, falls A eine Matrix in Jordanscher Normalform ist; in diesem Fall liefern die Spalten des Jordanblocks zum Eigenwert λ ein entsprechendes System von Lösungen. Im allgemeinen Fall ergibt sich die Aussage nun unmittelbar aus Proposition 3.9, denn ist $(\varphi_0, ..., \varphi_{r-1})$ ein System von Funktionen der angegebenen Form, und ist $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, dann haben auch die Einträge des Tupels $(T\varphi_0, ..., T\varphi_{r-1})$ die angegebene Gestalt. □

Man beachte, dass die Jordansche Normalform nicht bei der Formulierung, sondern lediglich beim Beweis von Satz 3.15 eine Rolle spielt. Tatsächlich kann ein Fundamentalsystem von Lösungen eines Systems $y' = Ay$ bestimmt werden, ohne die Jordansche Normalform J von A oder gar die Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $J = TAT^{-1}$ zu berechnen. Wir wollen dies an einem konkreten Beispiel demonstrieren und betrachten dazu das System $y' = Ay$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $\chi_A = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$. Wir setzen die erste Komponente des Lösungstupel $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ an in der Form $\varphi_0'(t) = e^{3t} \cdot {}^t(a\ b\ c)$, mit noch zu bestimmenden Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Genau dann ist φ_0 eine Lösung von $y' = Ay$, wenn

$$\varphi_0'(t) = A\varphi_0(t)\, \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 3e^{3t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{3t}A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

gilt. Es ist φ_0 also genau dann eine Lösung, wenn ${}^{\mathrm{t}}(a\ b\ c)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 3 ist. Mit der aus der Linearen Algebra bekannten Methode rechnet man nach, dass

$$\mathrm{Eig}(A,3) \quad = \quad \ker(A-3E) \quad = \quad \mathrm{lin}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Dies zeigt, dass durch $\varphi_0(t) = e^{3t} \cdot {}^{\mathrm{t}}(3\ 3\ 1)$ eine erste Lösung des Systems gegeben ist. Gemäß Satz 3.15 hat nun die Lösung φ_1 die Form

$$\varphi_1(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} a+dt \\ b+et \\ c+ft \end{pmatrix}$$

mit $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt jeweils die Äquivalenz

$$\varphi_1'(t) = A\varphi_1(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{3t}\begin{pmatrix} d+3(a+dt) \\ e+3(b+et) \\ f+3(c+ft) \end{pmatrix} = e^{3t}A\begin{pmatrix} a+dt \\ b+et \\ c+ft \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d+3a+3dt \\ e+3b+3et \\ f+3c+3ft \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a+dt \\ b+et \\ c+ft \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der Polynomkoeffizienten auf beiden Seiten erhalten wir das Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+3a \\ e+3b \\ f+3c \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Durch die zweite Gleichung wird wiederum nur ausgedrückt, dass ${}^{\mathrm{t}}(d\ e\ f)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist. Wir können also $d = 3$, $e = 3$, $f = 1$ setzen, damit ist diese Gleichung erfüllt. Setzen wir nun diese Werte in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3a \\ 3+3b \\ 1+3c \end{pmatrix}$$

was umgeformt werden kann zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5a & - & 4b & - & 3c & = & 3 \\ 7a & - & 5b & - & 6c & = & 3 \\ a & - & b & & & = & 1. \end{array}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus erhalten wir die Lösung $(a,b,d) = (0,-1,\frac{1}{3})$. Die gesuchte Lösung von $y' = Ay$ ist somit gegeben durch

$$\varphi_1(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3t \\ -1+3t \\ \frac{1}{3}+t \end{pmatrix}.$$

Die Komponente φ_2 hat nun nach Satz 3.15 die Form

$$\varphi_2(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} a+dt+gt^2 \\ b+et+ht^2 \\ c+ft+jt^2 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, \dots, g, h, j \in \mathbb{C}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\varphi_2'(t) = A\varphi_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{3t}\begin{pmatrix} d+3a+(2g+3d)t+3gt^2 \\ e+3b+(2h+3e)t+3ht^2 \\ f+3c+(2j+3f)t+3jt^2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a+dt+gt^2 \\ b+et+ht^2 \\ c+ft+jt^2 \end{pmatrix}.$$

Diesmal erhalten wir durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+3a \\ e+3b \\ f+3c \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g+3d \\ 2h+3e \\ 2j+3f \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix}.$$

Für (g, h, j) setzen wir wieder den Eigenvektor $(3, 3, 1)$ ein. Damit reduziert sich die zweite Gleichung auf

$$A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3d \\ 6+3e \\ 2+3f \end{pmatrix} \quad ,$$

was äquivalent ist zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5d & - & 4e & - & 3f & = & 6 \\ 7d & - & 5e & - & 6f & = & 6 \\ d & - & e & & & = & 2 \end{array}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert die Lösung $(d, e, f) = (0, -2, \frac{2}{3})$. Setzen wir dies wiederum in die erste Gleichung ein so erhalten wir

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ -2+3b \\ \frac{2}{3}+3c \end{pmatrix}$$

was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5a & - & 4b & - & 3c & = & 0 \\ 7a & - & 5b & - & 6c & = & -2 \\ a & - & b & & & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

umgeformt werden kann. Mit den Gauß-Algorithmus erhalten wir $(a, b, c) = (0, -\frac{2}{3}, \frac{8}{9})$. Insgesamt ist damit die letzte Komponente unseres Lösungstupels gegeben durch

$$\varphi_2(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3t^2 \\ -\frac{2}{3}-2t+3t^2 \\ \frac{8}{9}+\frac{2}{3}t+t^2 \end{pmatrix}.$$

Natürlich kann man problemlos durch Einsetzen überprüfen, das durch $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ das System $y' = Ay$ tatsächlich gelöst wird. (An der Tafel war Satz 3.15 für sowohl für $\mathbb{R}$ als auch für $\mathbb{C}$ formuliert worden, was keinen großen Unterschied macht. Mit dieser Formulierung ist dann allerdings von vornherein klar, dass die Polynome in den Lösungsfunktionen reelle Koeffizienten haben.)

Literaturverzeichnis

[Au] Bernd Aulbach, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*. 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag.

[Fo] Otto Forster, *Analysis 2*. 11. Auflage, Springer Spektrum.

[Wa] Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 7. Auflage, Springer-Verlag.