Checkliste zur Klausurvorbereitung in

Funktionentheorie, Lebesguetheorie, Gewöhnliche DGL

(a) Grundbegriffe

Teil 1: Integrationstheorie

- charakteristische Funktion χ_A einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- Jordan-Messbarkeit einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Jordan-Volumen $v(A)$
- Riemann-Integral $\int_A f(x)\,dx$ über eine Jordan-messbare Teilmenge
- Graph- und Ordinatenmenge einer Funktion
- Querschnitt einer Menge bezüglich einer Koordinatenachse
- Normalbereich bezüglich einer Koordinatenachse
- Lipschitz-Stetigkeit, Lipschitz-Konstante
- parametrisierte $\mathcal{C}^1$-Fläche
- orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$-Fläche
- Weglänge, Wegintegral 1. und 2. Art, komplexes Kurvenintegral
- Flächeninhalt, Flächenintegral 1. und 2. Art
- stetiges Einheitsnormalenfeld
- (konservatives) Vektorfeld
- Gradient einer reellwertigen Funktion
- Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes
- Halbnorm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum
- Definition des Raums $\mathcal{C}_n$
- Majoranten, Obersummen, Definition des Raums $\widehat{\mathcal{L}}_n$
- Definition des Raums $\mathcal{L}_n$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen

Teil 2: Funktionentheorie

- Argument und Polarkoordinaten einer komplexen Zahl
- komplexe Differenzierbarkeit und komplexe Ableitung, holomorphe Funktion
- reelle Differenzierbarkeit
- partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und Wirtinger-Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$
- Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe

- formale Ableitung einer Potenzreihe
- Definition der komplexen Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion, komplexer Logarithmus, komplexe Arkusfunktionen
- Homotopie von Kurven mit festen Endpunkten, freie Homotopie, zusammenziehbare Kurve
- konvexes bzw. sternförmiges bzw. einfach zusammenhängendes Gebiet
- Nullstellenordnung einer holomorphen Funktion in einem Punkt
- diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$, isolierter Punkt einer Teilmenge von $\mathbb{C}$
- Laurentreihen-Entwicklung einer holomorphen Funktion auf einem Kreisring
- Haupt- und Nebenteil einer holomorphen Funktion auf einem Kreisring
- hebbare Singularität, Polstelle, wesentliche Singularität, Ordnung einer Polstelle
- meromorphe Funktion
- Residuum einer holomorphen Funktion in einem Punkt
- Umlaufzahl eines geschlossenen Integrationsweges um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Differenzialgleichung erster Ordnung und n-ter Ordnung, Definitionsbereich einer solchen DGL
- System von Differenzialgleichungen erster Ordnung, Definitionsbereich eines solchen Systems
- Lösung einer DGL bzw. eines Systems von DGL
- (lokale) Lipschitz-Bedingung
- maximale Lösung einer DGL
- DGL mit getrennten Variablen
- exakte DGL, Stammfunktion, integrierender Faktor
- homogene und inhomogene lineare DGL
- homogenes und inhomogenes lineares System von DGLs
- Fundamentalsystem von Lösungen eines solchen Systems
- Wronski-Determinante
- Fundamentalsystem von Lösungen eines linearen homogenen Systems von DGLs, Wronski-Determinante
- Differenzialoperator n-ter Ordnung
- lineares homogenes System von DGLs mit konstanten Koeffizienten

(b) Wichtige Sätze und Zusammenhänge, Verständnisfragen

Teil 1: Integrationstheorie

- Wie lässt sich das $(n+1)$-dimensionale Volumen der Ordinatenmenge $\Lambda(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ einer Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ (mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar) berechnen? (Satz 3.18)
- Inwiefern lässt sich der Satz von Fubini durch den Begriff des Schnitts $A(x)$ verallgemeinern? (Satz 3.20)
- Wie berechnet man Volumina mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips? (Satz 3.21)
- Mit welchem hinreichenden Kriterium lässt sich lokale Lipschitz-Stetigkeit in vielen Fällen leicht nachweisen?
- Was besagt die mehrdimensionale Substitutionsregel? (Der Vergleich mit der eindimensionalen Substitutionregel hilft dabei, sich die Gleichung zu merken.) Welche Form nimmt die Substitutionsregel an, wenn man sie auf die Polarkoordinaten-Abbildung anwendet?
- Wie berechnet man Kurven- und Flächenintegrale (d.h. welche Einzelschritte sind erforderlich)?
- Was besagen der Gauß'sche und der Stokes'sche Integralsatz? Welche geometrische Interpretation von Divergenz und Rotation haben sich aus diesen Sätzen ergeben? (Sätze 5.34-36)
- Welche Schritte sind im Einzelnen durchzuführen, um anhand der Definition zu begründen, dass eine Funktion f Lebesgue-integrierbar ist?
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion mit endlichem Grenzwert $\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$. Inwiefern hilft der Satz über die monotone Konvergenz dabei, die Lebesgue-Integrierbarkeit von f nachzuweisen?
- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Welche Bedingung muss außerdem noch erfüllt sein, damit der Satz von Lesbesgue über die majorisierte Konvergenz die Lebesgue-Integrierbarkeit von f liefert? Welche Anwendungen hatten sich aus diesem Satz ergeben (am Ende von Kapitel 6)?

Teil 2: Funktionentheorie

- Wozu dienen die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Wirtinger-Ableitungen und der komplexen Differenzierbarkeit bzw. der komplexen Ableitung?
- Wie hatten wir den Definitionsbereich der Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ausgedehnt? Wie waren wir beim komplexen Logarithmus und bei den Arkusfunktionen vorgegangen?
- Was besagt der Cauchysche Integralsatz für sternförmige Gebiete? Wie lautet das Analogon für Kreisringe?
- Welche Bedingung ist äquivalent zur Existenz einer komplexen Stammfunktion für eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G?

- Wie lautet die Cauchysche Integralformel, und wie sieht das Analogon für Kreisringe aus?
- Welche wichtigen Sätze der Funktionentheorie hatten wir (direkt oder indirekt) aus der Cauchyschen Integralformel abgeleitet?
- Was ist über den Konvergenzbereich einer komplexen Potenzreihe bekannt?
- Welche Beziehung besteht zwischen holomorphen Funktionen und komplexen Potenzreihen?
- Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist, welchen Konvergenzradius hat dann die Potenzreihe von f um einen beliebigen Punkt $a \in C$? Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ um einen vorgegebenen Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, zum Beispiel $z = 5$?
- Wie hängen die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung mit den höheren komplexen Ableitungen von f zusammen? Lassen sich die Koeffizienten auch durch Kurvenintegrale ausdrücken?
- Welche wichtige Rolle spielt die geometrische Reihe bei der Bestimmung von Potenz- und Laurentreihen-Entwicklungen? (Gehen Sie hierzu noch einmal die Übungsaufgaben durch, und werfen Sie auch noch einmal einen Blick auf den Beweis des Satzes von der Potenzreihenentwicklung, Satz 3.7.)
- Was muss im Einzelnen überprüft werden, um mit Hilfe des Identitätssatzes nachzuweisen, dass zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ übereinstimmen?
- Was besagt der Satz von Liouville, und durch welche Überlegungen hatte sich der Fundamentalsatz der Algebra daraus ergeben?
- Was sagt der Satz über die Gebietstreue über das Bild $f(G)$ eines Gebiets $G \subseteq \mathbb{C}$ unter einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung aus?
- Gibt es eine nicht-konstante holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ auf der offenen Kreisscheibe vom Radius 1 mit $|f(z)| \le |f(0)|$ bzw. $|f(z)| \ge |f(0)| > 0$ für alle $z \in B_1(0)$?
- Durch welche Eigenschaft sind hebbare Singularitäten bzw. Polstellen charakterisiert? (Satz 6.9, Satz 6.10)
- Wie lässt sich die Umlaufzahl einer Kurve um einen Punkt geometrisch bestimmen?
- Was besagt der Residuensatz? Wie lässt sich ein geschlossenes Kurvenintegral einer holomorphen Funktion mit dem Residuensatz berechnen?
- Wie waren wir in der Vorlesung und in den Übungen vorgegangen, um ein reelles Integral der Form $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ mit dem Residuensatz zu berechnen?

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum welcher Dimension ist der Definitionsbereich (i) einer DGL erster Ordnung (ii) einer DGL n-ter Ordnung (iii) eines Systems von n DGLs erster Ordnung enthalten? (Definition 1.1, 1.2 und 1.3)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Definitionsbereich $I : \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ einer Lösung eines Systems und dem Definitionsbereich D des Systems?

- Mit welchem Kriterium lässt sich die lokale Lipschitz-Bedingung in vielen Fällen leicht verifizieren? (Prop. 1.5)
- Welche Rolle spielt die lokale Lipschitz-Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Systems von DGLs?
- Welche elementaren Lösungsverfahren für DGLs haben wir behandelt? Welche Schritte sind dafür im Einzelnen durchzuführen?
- Wie lässt sich verifizieren, dass ein gegebenes Tupel von Funktionen $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen eines linearen Systems von DGLs ist?

(c) Beweis- und Rechentechniken

Die Angaben in Klammern verweisen auf die Übungsaufgaben
(z.B. G1A3 = Globalübungsblatt 1, Aufgabe 3).

Teil 1: Integrationstheorie

- Berechnung von Querschnitten (T1A0,
- Berechnung von Integralen über Jordan-messbare Teilmengen (T1A1, G1A1)
- Anwendung des Cavalierischen Prinzips (T1A2, G1A2, G3A1)
- Beweisaufgaben zur Jordan-Messbarkeit (T1A3, G1A3)
- Anwendung des Transformationssatzes (T2A0, T2A1, T2A3, G2A1, G2A2, G2A3, T3A1, G3A2)
- Beweisaufgaben zur Lipschitz-Stetigkeit (T2A2)
- Berechnung von Kurvenintegralen (T3A2, T3A3)
- Berechnung von Flächenintegralen (T4A0, T4A1, T4A2, G4A2, G4A3)
- Anwendungen der Integralsätze (T4A3, G4A1, T5A1, G5A1)
- Beweisaufgaben zum Lebesgue-Integral (T5A3, G5A2)
- Nachweis der Lebesgue- bzw. (uneigentlichen) Riemann-Integrierbarkeit (G5A3, T7A1, G7A3)
- Anwendung der Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie (T6A1, G6A1, G6A2)

Teil 2: Funktionentheorie

- Bestimmung der Polarkoordinaten komplexer Zahlen (T7A2)
- Aufgaben zur komplexen und reellen Differenzierbarkeit (T6A3, T7A3, G7A1, G7A2)
- Berechnung komplexer Kurvenintegrale (G6A3)
- Existenz komplexer Stammfunktionen (T8A1, T8A3, G8A1, G8A3, T9A2, G9A2, G11A2)
- Bestimmung von Potenz- und Laurentreihenentwicklungen (T8A1, T8A2, G8A2, T11A1, G11A1)

- Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel (T9A1, G9A1)
- Berechnung reeller Integrale mit dem Cauchyschen Integralsatz oder dem Residuensatz (T9A3, G9A3, G10A2, T12A1, G12A1)
- Anwendung des Maximumsprinzips und des Satzes von Liouville (T10A1, G10A1)
- Anwendung des Identitätssatzes (T10A2, T10A3, G10A2, G10A3)
- Bestimmung des Singularitätentyps (T11A2, G11A2)
- Bweisaufgabe zum Residuum (T11A3)
- Berechnung komplexer Integrale mit dem Residuensatz (G11A3)

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Umformung von DGLs höherer Ordnung in Systeme erster Ordnung (T12A3)
- Lösung von Differenzialgleichungen mit Trennung der Variablen oder Substitution (T12A2, G12A2)
- Lösung von Differenzialgleichungen durch Variation der Konstanten (T13A1)
- Lösung von DGLs höherer Ordnung (T13A2)