



Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022

12. August 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

(Lehramt Gymnasium)

Hauptklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

- Studiengang:
- ☐ Lehramt Gymnasium
 - ☐ Bachelor Wirtschaftspädagogik
 - ☐ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Hinweise:

- (a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.
- (b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.
- (c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- (d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.
- (e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.
- (f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (3+7 Punkte)

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge D gegeben durch

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{5}x, y \leq x, y \leq 6 - x\}.$$

Es handelt sich dabei um das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(5, 1)$ und $(3, 3)$.

- (a) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $D(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D\}$ von $\mathbb{R}$. (Dies ist ein endliches, abgeschlossenes Intervall, ein einzelner Punkt in $\mathbb{R}$ oder die leere Menge.)

- (b) Berechnen Sie das Integral $\int_D xy \, d(x, y)$.

Lösung:

zu (a) Für alle $(x, y) \in D$ gilt $y \geq \frac{1}{5}x$ und $y \leq x$, also $x \geq \frac{1}{5}x$, was zu $\frac{4}{5}x \geq 0$ und $x \geq 0$ umgeformt werden kann. Dies zeigt, dass $(x, y) \notin D$ für $x < 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, d.h. es gilt $D(x) = \emptyset$ für alle $x < 0$. Aus $y \geq \frac{1}{5}x$ und $y \leq 6 - x$ folgt ebenso $6 - x \geq \frac{1}{5}x$, für alle $(x, y) \in D$, was zu $\frac{6}{5}x \leq 6$ und $x \leq 5$ umgeformt werden kann. Damit erhalten wir $D(x) = \emptyset$ für alle $x > 5$.

Die Bedingung $x \leq 6 - x$ ist äquivalent zu $x \leq 3$. Für alle $x \in [0, 3]$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt also die Äquivalenz

$$y \in D(x) \Leftrightarrow (x, y) \in D \Leftrightarrow \frac{1}{5}x \leq y \leq x \Leftrightarrow y \in [\frac{1}{5}x, x]$$

und somit $D(x) = [\frac{1}{5}x, x]$. Für alle $x \in]3, 5]$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt entsprechend

$$y \in D(x) \Leftrightarrow (x, y) \in D \Leftrightarrow \frac{1}{5}x \leq y \leq 6 - x \Leftrightarrow y \in [\frac{1}{5}x, 6 - x]$$

und somit $D(x) = [\frac{1}{5}x, 6 - x]$.

zu (b)

$$\begin{aligned} \int_D xy \, d(x, y) &= \int_0^5 x \left(\int_{D(x)} y \, dy \right) dx = \int_0^3 x \left(\int_{\frac{1}{5}x}^x y \, dy \right) dx + \int_3^5 x \left(\int_{\frac{1}{5}x}^{6-x} y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^3 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{1}{5}x}^x dx + \int_3^5 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{1}{5}x}^{6-x} dx = \int_0^3 \frac{1}{2} x \left(x^2 - \frac{1}{25} x^2 \right) dx + \int_3^5 \frac{1}{2} x \left((6-x)^2 - \frac{1}{25} x^2 \right) dx \\ &= \int_0^3 \frac{12}{25} x^3 dx + \int_3^5 (18x - 6x^2 + \frac{12}{25} x^3) dx = \left[\frac{3}{25} x^4 \right]_0^3 + \left[9x^2 - 2x^3 + \frac{3}{25} x^4 \right]_3^5 \\ &= \left[\frac{3}{25} x^4 \right]_0^5 + \left[9x^2 - 2x^3 \right]_3^5 = 75 + (225 - 250 - 81 + 54) = 354 - 331 = 23. \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 2. (3+7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, und sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ die aus der Vorlesung bekannte Polarkoordinaten-Abbildung. Desweiteren betrachten wir im $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x, y \leq 0\}.$$

- (a) Geben Sie eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\rho(B) = V$ an. Ein Nachweis der Gleichung ist nicht erforderlich.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes das Integral $\int_V f(x,y) d(x,y)$.

Lösung:

zu (a) Eine solche Teilmenge ist gegeben durch $B = [1, \sqrt{2}] \times [\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

zu (b) Der Transformationssatz, angewendet auf die Polarkoordinaten-Abbildung, liefert

$$\begin{aligned} \int_V f(x,y) d(x,y) &= \int_B f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r d(r, \varphi) = \int_B \frac{r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)}{r^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2} \cdot r d(r, \varphi) \\ &= \int_B \cos(\varphi) d(r, \varphi) + \int_B \sin(\varphi) d(r, \varphi) = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(\varphi) d\varphi \right) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(\varphi) d\varphi \right) dr \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} (\sin(\frac{3}{2}\pi) - \sin(\pi)) dr + \int_1^{\sqrt{2}} (\cos(\pi) - \cos(\frac{3}{2}\pi)) dr \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} (-1) dr + \int_1^{\sqrt{2}} (-1) dr = (-2)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit der durch Anwendung des Satzes von Lebesgue nachgewiesen werden kann, dass die Funktion f Lebesgue-integrierbar ist. Ein Durchführung des Nachweises ist aber *nicht* erforderlich.

(c) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral der Funktion f . Hier genügt der Rechenweg; es brauchen keine Voraussetzungen überprüft werden.

Lösung:

zu (a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Außerdem existiere eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f_m| \leq g$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\int_A f(x) dx = \lim_m \int_A f_m(x) dx$.

zu (b) Eine solche Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist zum Beispiel gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{falls } 1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

zu (c) Erfüllt die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Teil (b) die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue, dann gilt auf Grund des Satzes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} [2\sqrt{x-1}]_{1+\frac{1}{n}}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\sqrt{2-1} - \sqrt{(1+\frac{1}{n})-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2. \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 4. (2+2+6 Punkte)

Wir betrachten für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto a \cdot \operatorname{Re}(z) + bi \cdot \operatorname{Im}(z)$.

- (a) Sei $f_{a,b} = g_{a,b} + ih_{a,b}$ die Zerlegung von $f_{a,b}$ in Real- und Imaginärteil. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial x}$, $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial y}$, $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial x}$ und $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial y}$.
- (b) Zeigen Sie, dass $f_{a,b}$ genau dann auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, wenn $a = b$ gilt, und bestimmen Sie die komplexe Ableitung $f'_{a,a}(z)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$.
- (c) Berechnen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f_{a,b}(z) dz$, wobei der Integrationsweg γ durch $\gamma = [0, 1] + [1, 1+i] + [1+i, i] + [i, 0]$ gegeben ist. Es handelt sich dabei um die Randkurve des Quadrats mit den Eckpunkten $0, 1, 1+i$ und i .

Lösung:

zu (a) Der Real- und Imaginärteil der Funktion sind gegeben durch $g_{a,b}(x+iy) = ax$ und $h_{a,b}(x+iy) = by$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Für die Richtungsableitungen erhalten wir somit $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial x}(x+iy) = a$, $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial y}(x+iy) = 0$, $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial x}(x+iy) = 0$ und $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial y}(x+iy) = b$.

zu (b) Alle Richtungsableitungen sind konstant, damit insbesondere stetig. Dies zeigt, dass $f_{a,b}$ (aufgefasst als Funktion zwischen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen) stetig differenzierbar, also auf jeden Fall reell differenzierbar ist, für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen ist $f_{a,b}$ in einem Punkt $z \in \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial x}(z) = \frac{\partial h_{a,b}}{\partial y}(z)$ und $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial x}(z) = -\frac{\partial g_{a,b}}{\partial y}(z)$ gilt, was nach Teil (a) zu $(a = b) \wedge (0 = -0)$, also zu $a = b$ äquivalent ist. Im Fall $a = b$ gilt $f_{a,a}(z) = a \cdot \operatorname{Re}(z) + ai \cdot \operatorname{Im}(z) = a \cdot (\operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)) = az$ und somit $f'(z) = a$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

zu (c) Sind allgemein $p, q \in \mathbb{C}$, dann wird laut Vorlesung die Verbindungsstrecke $[p, q]$ von $\gamma_{p,q} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-t)p + tq$ durchlaufen. Somit gilt $\int_p^q f(z) dz = \int_0^1 (f \circ \gamma_{p,q})(t) \gamma'_{p,q}(t) dt = (q-p) \int_0^1 f((1-t)p + tq) dt$ für jede stetige Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{a,b}(z) dz &= 1 \cdot \int_0^1 f_{a,b}(t) dt = a \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}a \\ \int_1^{1+i} f_{a,b}(z) dz &= i \cdot \int_0^1 f_{a,b}((1-t) + (1+i)t) dt = i \cdot \int_0^1 f_{a,b}(1+it) dt = \\ &= i \cdot \int_0^1 (a + ibt) dt = ai \int_0^1 1 dt + (-b) \int_0^1 t dt = (-\frac{1}{2}b) + ai \\ \int_{1+i}^i f_{a,b}(z) dz &= (-1) \int_0^1 f_{a,b}((1-t)(1+i) + ti) dt = (-1) \int_0^1 f_{a,b}((1-t) + i) dt \\ &= (-1) \int_0^1 (a(1-t) + ib) dt = (-a) \int_0^1 (1-t) dt + (-ib) \int_0^1 1 dt = (-\frac{1}{2}a) + (-b)i \\ \int_i^0 f_{a,b}(z) dz &= (-i) \int_0^1 f_{a,b}((1-t)i + t \cdot 0) dt = (-i) \int_0^1 (1-t)bi dt = b \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}b. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also für das Kurvenintegral den Wert

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2}a + ((-\frac{1}{2}b) + ai) + ((-\frac{1}{2}a) + (-b)i) + \frac{1}{2}b = (a-b)i.$$

Name: _____

Aufgabe 5. (2+4+4 Punkte)

Gegeben seien die beiden Integrationswege $\gamma, \delta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = 5 + 3e^{it}$ und $\delta(t) = 4e^{-it}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes, der Cauchyschen Integralformel oder des Residuensatzes.

(a) $\int_{\gamma} \left(\ln(z) + \frac{\sin(z)}{z^2 + 2} \right) dz$

(b) $\int_{\gamma} \frac{z^2 + 5}{(z - 3)(z + 1)} dz$

(c) $\int_{\delta} \frac{3z + 7}{(z + 2)(z - 1)} dz$

Lösung:

zu (a) Die Kurve γ umläuft die Kreisscheibe $\bar{B}_3(5)$ mit Mittelpunkt 5 vom Radius 3 in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn). Die Funktion unter dem Integralzeichen ist in einer Umgebung dieser Kreisscheibe holomorph, denn die komplexe Logarithmusfunktion ist laut Vorlesung außerhalb der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ holomorph, und die Nullstellen $\pm i\sqrt{2}$ des Nennerpolynoms $z^2 + 2$ liegen auf der imaginären Achse; für alle $z \in \bar{B}_3(5)$ gilt dagegen $|\operatorname{Re}(z) - 5| \leq |z - 5| \leq 3$ und damit $\operatorname{Re}(z) \geq 5 - 3 = 2 > 0$. Wir können somit die Cauchysche Integralformel anwenden, und demnach ist das Integral gleich null.

zu (b) Die Nennerfunktion besitzt zwei Nullstellen, -1 und 3 . Die Nullstelle 3 liegt wegen $|3 - 5| = 2 < 3$ im Inneren der Kreisscheibe $\bar{B}_3(5)$, die Nullstelle -1 wegen $|(-1) - 5| = |-6| = 6 > 3$ außerhalb. Daraus folgt, dass die Funktion $z \mapsto \frac{z^2 + 5}{z + 1}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung der Kreisscheibe $\bar{B}_3(5)$ holomorph ist. Mit der Cauchyschen Integralformel erhalten wir somit

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 5}{(z - 3)(z + 1)} dz = 2\pi i \cdot \frac{3^2 + 5}{3 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{7}{2} = 7\pi i.$$

zu (c) Neben der Funktion $f(z) = \frac{3z + 7}{(z + 2)(z - 1)}$ definieren wir die Hilfsfunktionen $g(z) = \frac{3z + 7}{z - 1}$ und $h(z) = \frac{3z + 7}{z + 2}$. Wegen $f(z) = (z + 2)^{-1}g(z)$ und $f(z) = (z - 1)^{-1}h(z)$ gilt dann

$$\operatorname{res}_{-2} f(z) = g(-2) = \frac{3 \cdot (-2) + 7}{(-2) - 1} = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_1 f(z) = h(1) = \frac{3 \cdot 1 + 7}{1 + 2} = \frac{10}{3}.$$

Die Kurve δ umläuft die Kreisscheibe $\bar{B}_4(0)$ in negativer Richtung, und die beiden Nullstellen -2 und 1 der Nennerfunktion liegen wegen $|-2| = 2 < 4$ und $1 < 4$ im Inneren. Deshalb gilt $n(\delta, -2) = n(\delta, 1) = -1$. Der Residuensatz liefert also

$$\int_{\delta} f(z) dz = 2\pi i \cdot n(\delta, -2) \operatorname{res}_{-2} f(z) + 2\pi i \cdot n(\delta, 1) \operatorname{res}_1 f(z) = 2\pi i \cdot (-1) \left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi i \cdot (-1) \frac{10}{3} = -6\pi i.$$

Name: _____

Aufgabe 6. (7+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die beiden Laurentreihen-Entwicklungen $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z+2)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z+3)^n$ der Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-2, -3\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(z+2)(z+3)^2}$$

um die Punkte -2 und -3 , d.h. geben Sie $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ explizit an. Geben Sie außerdem jeweils den maximalen Kreisring an, auf dem die Laurentreihen-Entwicklung gültig ist. (Hier reicht die Angabe, ein Nachweis ist nicht erforderlich.)

- (b) Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel für eine komplexwertige Funktion an mit (i) einer hebbaren Singularität (ii) einer Polstelle 3. Ordnung (iii) einer wesentlichen Singularität im Punkt $a = 1$. Auch hier sind keine Nachweise erforderlich.

Lösung:

zu (a) Definieren wir die Hilfsfunktion $g(z) = -\frac{1}{z+3}$, dann gilt $g'(z) = \frac{1}{(z+3)^2}$ und somit $f(z) = (z+2)^{-1}g'(z)$. Die Rechnung

$$g(z) = -\frac{1}{z+3} = -\frac{1}{1+(z+2)} = -\frac{1}{1-(-1)(z+2)} = (-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z+2)^n$$

liefert

$$f(z) = (z+2)^{-1}g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z+2)^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+2) (z+2)^n.$$

Die Koeffizienten der Laurentreihen-Entwicklung sind also gegeben durch $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq -2$ und $a_n = (-1)^{n+1}(n+2)$ für $n \geq -1$. Diese Entwicklung ist gültig auf dem Kreisring $K_{0,1}(-2)$.

Die Koeffizienten b_n bezüglich des Entwicklungspunktes -3 erhält man durch

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+3)^{-2} \cdot \frac{1}{z+2} = (z+3)^{-2} \cdot \frac{1}{z+3-1} = -(z+3)^{-2} \cdot \frac{1}{1-(z+3)} \\ &= -(z+3)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (z+3)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+3)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)(z+3)^n. \end{aligned}$$

Es gilt also $b_n = 0$ für $n \leq -3$ und $b_n = -1$ für $n \geq -2$. Die Entwicklung ist gültig auf dem Kreisring $K_{0,1}(-3)$.

zu (b) Die Funktion $z \mapsto \frac{\sin(z-1)}{z-1}$ hat eine hebbare Singularität, die Funktion $z \mapsto \frac{1}{(z-1)^3}$ eine Polstelle 3. Ordnung und $z \mapsto e^{-1/(z-1)}$ eine wesentliche Singularität im Punkt $a = 1$.

Name: _____

Aufgabe 7. (3+5+2 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \supseteq \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2+1}{n^2+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $N = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

- (a) Bestimmen Sie $f(0)$ und begründen Sie, dass N eine nicht-diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.
- (b) Geben Sie Polynomfunktionen $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ an, so dass $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ für alle $z \in G$ erfüllt ist, und weisen Sie dies mit Hilfe des Identitätssatzes nach.
- (c) Begründen Sie, dass die Punkte $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ nicht im Definitionsbereich G von f enthalten sind.

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \supseteq \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2+1}{n^2+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $N = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Lösung:

zu (a) Als holomorphe Funktion ist f insbesondere stetig im Punkt $0 \in G$. Deshalb gilt $f(0) = \lim_n f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{1+n^{-2}}{1+2n^{-2}} = \frac{1+0}{1+2 \cdot 0} = 1$. Die Teilmenge N ist nicht-diskret, denn es gilt $0 \in N$, und für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ liegen unendlich viele Punkte aus N in $B_\varepsilon(0)$, nämlich $\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-1}$.

zu (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt jeweils

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{1 + (\frac{1}{n})^2}{1 + 2(\frac{1}{n})^2}.$$

Definieren wir also $g(z) = z^2+1$ und $h(z) = 2z^2+1$, dann ist $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})/h(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Außerdem gilt $f(0) = 1 = g(0)/h(0)$. Die Funktionen f und $z \mapsto g(z)/h(z)$ stimmen also auf der nicht-diskreten Teilmenge N von G überein. Die Nullstellen des Nennerpolynoms h sind gegeben durch $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$, somit ist $z \mapsto g(z)/h(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\}$ holomorph. Auf Grund des Identitätssatzes gilt stimmen f und $z \mapsto g(z)/h(z)$ somit auf $G \setminus \{\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\}$ überein. Unter der Voraussetzung $\pm \frac{i}{\sqrt{2}} \notin G$ stimmen die beiden Funktionen also auf G überein.

zu (c) Wäre einer der beiden Punkte $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ im Definitionsbereich G von f enthalten, dann wäre durch f nach Teil (b) eine holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto g(z)/h(z)$ in diesem Punkt gegeben, der Punkt also eine hebbare Singularität dieser Funktion. Da $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ Nullstellen von h , aber keine Nullstellen von g sind, handelt es sich bei den beiden Punkten aber um Polstellen 1. Ordnung der Funktion und somit *nicht* um hebbare Singularitäten.

Name: _____

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

- (a) Wir betrachten die Differenzialgleichung vierter Ordnung $y'''' = y$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass einer solchen DGL ein System $y' = f(x, y)$ von DGLs erster Ordnung zugeordnet werden kann, auf das sich die Lösung der ursprünglichen DGL zurückführen lässt. Geben Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ an, die dieses System definiert, außerdem eine Lösung der DGL vierter Ordnung und die zugehörige Lösung des Systems. Nachweise sind nicht erforderlich.
- (b) Bestimmen Sie eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x}{y+1}$$

mit $\varphi(1) = 2$. Auch hier ist kein Nachweis erforderlich, es genügt der Rechenweg.

Lösung:

zu (a) Der angegebenen DGL vierter Ordnung entspricht das System $y'_0 = y_1, y'_1 = y_2, y'_2 = y_3, y'_3 = y_0$, die zugehörige Funktion $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ist gegeben durch $f(x, y_0, y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3, y_0)$. Eine Lösung der DGL vierter Ordnung ist zum Beispiel die Sinusfunktion, wegen $\sin'(x) = \cos(x)$, $\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$, $\sin'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$, $\sin''''(x) = -\cos'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die zugehörige Lösung des Systems besteht aus den Ableitungen dieser Funktion von der nullten bis zur dritten Ordnung, ist also gegeben durch $\varphi(x) = (\sin(x), \cos(x), -\sin(x), -\cos(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

zu (b) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen. Gemäß dem Lösungsverfahren aus der Vorlesung definieren wir

$$F(x) = \int_1^x t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^x = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

und

$$G(y) = \int_2^y (t+1) \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 + t \right]_2^y = \frac{1}{2} y^2 + y - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 = \frac{1}{2} y^2 + y - 4.$$

Die Umformung

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} y^2 + y - 4 &\Leftrightarrow 2x = y^2 + 2y - 8 \Leftrightarrow 2x + 9 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow 2x + 9 = (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow y+1 = \sqrt{2x+9} \Leftrightarrow y = \sqrt{2x+9} - 1 \end{aligned}$$

zeigt, dass $H(x) = \sqrt{2x+9} - 1$ eine Umkehrfunktion von G ist. Durch $\varphi(x) = (H \circ F)(x) = H(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = \sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) + 9} - 1 = \sqrt{x^2 + 8} - 1$ ist also eine Lösung der DGL gegeben.