LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022
12. August 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

(Lehramt Gymnasium)

Hauptklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (3+7 Punkte)

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge D gegeben durch

$$D \quad = \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \tfrac{1}{5}x \ , \ y \leq x \ , \ y \leq 6 - x\}.$$

Es handelt sich dabei um das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(5,1)$ und $(3,3)$.

(a) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $D(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in D\}$ von $\mathbb{R}$. (Dies ist ein endliches, abgeschlossenes Intervall, ein einzelner Punkt in $\mathbb{R}$ oder die leere Menge.)

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_D xy \; d(x,y)$.

Name: ____

Aufgabe 2. (3+7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, und sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ die aus der Vorlesung bekannte Polarkoordinaten-Abbildung. Desweiteren betrachten wir im $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$V \quad = \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \;,\; x,y \leq 0\right\}.$$

(a) Geben Sie eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\rho(B) = V$ an. Ein Nachweis der Gleichung ist nicht erforderlich.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes das Integral $\int_V f(x,y)\, d(x,y)$.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit der durch Anwendung des Satzes von Lebesgue nachgewiesen werden kann, dass die Funktion f Lebesgue-integrierbar ist. Ein Durchführung des Nachweises ist aber *nicht* erforderlich.

(c) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral der Funktion f. Hier genügt der Rechenweg; es brauchen keine Voraussetzungen überprüft werden.

Name: ____

Aufgabe 4. (2+2+6 Punkte)

Wir betrachten für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a \cdot \mathrm{Re}(z) + bi \cdot \mathrm{Im}(z)$.

(a) Sei $f_{a,b} = g_{a,b} + ih_{a,b}$ die Zerlegung von $f_{a,b}$ in Real- und Imaginärteil. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial x}$, $\frac{\partial g_{a,b}}{\partial y}$, $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial x}$ und $\frac{\partial h_{a,b}}{\partial y}$.

(b) Zeigen Sie, dass $f_{a,b}$ genau dann auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, wenn $a = b$ gilt, und bestimmen Sie die komplexe Ableitung $f'_{a,a}(z)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$.

(c) Berechnen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f_{a,b}(z)\, dz$, wobei der Integrationsweg γ durch $\gamma = [0, 1] + [1, 1 + i] + [1 + i, i] + [i, 0]$ gegeben ist. Es handelt sich dabei um die Randkurve des Quadrats mit den Eckpunkten 0, 1, $1 + i$ und i.

Name: ____

Aufgabe 5. (2+4+4 Punkte)

Gegeben seien die beiden Integrationswege $\gamma, \delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = 5 + 3e^{it}$ und $\delta(t) = 4e^{-it}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes, der Cauchyschen Integralformel oder des Residuensatzes.

(a) $\displaystyle\int_\gamma \left(\ln(z) + \frac{\sin(z)}{z^2 + 2} \right) dz$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2 + 5}{(z-3)(z+1)} \, dz$

(c) $\displaystyle\int_\delta \frac{3z + 7}{(z+2)(z-1)} \, dz$

Name: ____________________

Aufgabe 6. (7+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die beiden Laurentreihen-Entwicklungen $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z+2)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z+3)^n$ der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-2,-3\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{1}{(z+2)(z+3)^2}$$

um die Punkte -2 und -3, d.h. geben Sie $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ explizit an. Geben Sie außerdem jeweils den maximalen Kreisring an, auf dem die Laurentreihen-Entwicklung gültig ist. (Hier reicht die Angabe, ein Nachweis ist nicht erforderlich.)

(b) Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel für eine komplexwertige Funktion an mit (i) einer hebbaren Singularität (ii) einer Polstelle 3. Ordnung (iii) einer wesentlichen Singularität im Punkt $a = 1$. Auch hier sind keine Nachweise erforderlich.

Name: ____

Aufgabe 7. (3+5+2 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \supseteq \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2+1}{n^2+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $N = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(a) Bestimmen Sie $f(0)$ und begründen Sie, dass N eine nicht-diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

(b) Geben Sie Polynomfunktionen $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, so dass $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ für alle $z \in G$ erfüllt ist, und weisen Sie dies mit Hilfe des Identitätssatzes nach.

(c) Begründen Sie, dass die Punkte $\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ nicht im Definitionsbereich G von f enthalten sind.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

(a) Wir betrachten die Differenzialgleichung vierter Ordnung $y'''' = y$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass einer solchen DGL ein System $y' = f(x, y)$ von DGLs erster Ordnung zugeordnet werden kann, auf das sich die Lösung der ursprünglichen DGL zurückführen lässt. Geben Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ an, die dieses System definiert, außerdem eine Lösung der DGL vierter Ordnung und die zugehörige Lösung des Systems. Nachweise sind nicht erforderlich.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x}{y+1}$$

mit $\varphi(1) = 2$. Auch hier ist kein Nachweis erforderlich, es genügt der Rechenweg.