



Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022

6. Oktober 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

- Studiengang:
- ☐ Lehramt Gymnasium
 - ☐ Bachelor Wirtschaftspädagogik
 - ☐ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Hinweise:

- (a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.
- (b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.
- (c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- (d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.
- (e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.
- (f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (4+6 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge A gegeben durch

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2, |x + y| \leq 2\}.$$

(Es handelt sich um ein nicht-regelmäßiges Sechseck. Fertigen Sie eventuell zur Orientierung eine Skizze an.)

- (a) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $A(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ von $\mathbb{R}$. (Dies ist ein endliches, abgeschlossenes Intervall, ein einzelner Punkt in $\mathbb{R}$ oder die leere Menge.)
- (b) Berechnen Sie durch Verwendung des Ergebnisses aus Teil (a) den Flächeninhalt $v_2(A)$ der Menge A .

Lösung:

zu (a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Im Fall $|x| > 2$ gilt $(x, y) \notin A$ und $y \notin A(x)$ für alle $y \in \mathbb{R}$, also $A(x) = \emptyset$. Im Fall $-2 \leq x \leq 0$ gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} y \in A(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in A \Leftrightarrow |y| \leq 2 \text{ und } |x + y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2 \text{ und } -2 \leq x + y \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2 \text{ und } -2 - x \leq y \leq 2 - x \Leftrightarrow \max\{-2, -2 - x\} \leq y \leq \min\{2, 2 - x\} \Leftrightarrow -2 - x \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

und somit $A(x) = [-2 - x, 2]$. Im Fall $0 \leq x \leq 2$ gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} y \in A(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in A \Leftrightarrow |y| \leq 2 \text{ und } |x + y| \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\max\{-2, -2 - x\} \leq y \leq \min\{2, 2 - x\} \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2 - x \end{aligned}$$

und somit $A(x) = [-2, 2 - x]$.

zu (b) Mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips erhalten wir

$$\begin{aligned} v_2(A) &= \int_{-2}^2 v_1(A(x)) dx = \int_{-2}^0 v_1([-2 - x, 2]) dx + \int_0^2 v_1([-2, 2 - x]) dx = \\ &\int_{-2}^0 (2 - (-2 - x)) dx + \int_0^2 ((2 - x) - (-2)) dx = \int_{-2}^0 (4 + x) dx + \int_0^2 (4 - x) dx = \\ \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^{-2} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^2 &= \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 4(-2)\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 0^2 - 4 \cdot 0\right) \\ &= (8 - 2) + (8 - 2) = 12. \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Teilmenge H gegeben durch

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, 0 \leq z \leq 3, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten-Abbildung $\rho_{\text{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, h, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), h)$ das Integral

$$\int_H \frac{xz}{x^2 + y^2} d(x, y, z).$$

Lösung:

Die Menge $A = [1, \sqrt{2}] \times [0, 3] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ erfüllt die Bedingung $\rho_{\text{zyl}}(A) = H$, und es existiert eine Jordansche Nullmenge $N \subseteq A$, so dass $\rho_{\text{zyl}}|_{A \setminus N}$ injektiv ist. Durch die Wahl des Winkelbereichs $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ ist gewährleistet, dass für $(r, h, \varphi) \in A$ und $(x, y, z) = \rho_{\text{zyl}}(r, h, \varphi)$ jeweils $x = r \cos(\varphi) \geq 0$ erfüllt ist. Setzen wir $f(x, y, z) = \frac{xz}{x^2 + y^2}$, dann gilt für alle $(r, h, \varphi) \in A$ jeweils

$$\begin{aligned} (f \circ \rho_{\text{zyl}})(r, h, \varphi) &= f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), h) = \frac{r \cos(\varphi) h}{(r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2} = \\ \frac{r \cos(\varphi) h}{r^2 (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2)} &= \frac{r \cos(\varphi) h}{r^2} = \frac{\cos(\varphi) h}{r}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Transformationssatzes erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_H \frac{xz}{x^2 + y^2} d(x, y, z) &= \int_A (f \circ \rho_{\text{zyl}})(r, h, \varphi) \cdot r d(r, h, \varphi) = \int_A \cos(\varphi) h d(r, h, \varphi) = \\ (\sqrt{2} - 1) \int_{[0, 3] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]} \cos(\varphi) h d(h, \varphi) &= (\sqrt{2} - 1) \int_0^3 h \left(\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(\varphi) d\varphi \right) dh = \\ (\sqrt{2} - 1) \int_0^3 h [\sin(\varphi)]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} dh &= (\sqrt{2} - 1) \int_0^3 (1 - (-1)) h dh = 2(\sqrt{2} - 1) \int_0^3 h dh = \\ 2(\sqrt{2} - 1) \cdot [\frac{1}{2} h^2]_0^3 &= (\sqrt{2} - 1) \cdot (3^2 - 0^2) = 9(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Geben Sie eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die punktweise gegen f konvergiert. Dabei soll für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall $I_n \subseteq \mathbb{R}$ existieren, so dass jeweils $f_n(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus I_n$ gilt. Ein Nachweis dieser Eigenschaften ist *nicht* erforderlich.
- (b) Formulieren Sie den Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz.
- (c) Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist, und bestimmen Sie das Lebesgue-Integral von f . Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Funktion f die Ableitung der Arkus tangens-Funktion ist, und dass

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = -\frac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) = \frac{1}{2}\pi \quad \text{gilt.}$$

Lösung:

zu (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n = [-n, n]$ und $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Nullfortsetzung von $f|_{I_n}$, also

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2+1} & \text{falls } -n \leq t \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann besitzt die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle angegebenen Eigenschaften. (Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n Lebesgue-integrierbar, denn nach Definition ist die Lebesgue-Integrierbarkeit von f_n äquivalent zur Lebesgue-Integrierbarkeit von $f_n|_{I_n} = f|_{I_n}$. Die Funktion $f|_{I_n}$ ist als stetige Funktion auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar und damit laut Vorlesung auch Lebesgue-integrierbar. Dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ überall monoton wachsend ist, folgt leicht aus der Tatsache, dass $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dass die Folge überall punktweise gegen f konvergiert, beweist man mit Hilfe der Beobachtung, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in I_n$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist; jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq |x|$ genügt dieser Bedingung.)

zu (b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fast überall monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integrale $\int_A f_m(x) dx$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen die Funktion f konvergiert, mit $\lim_m \int_A f_m(x) dx = \int_A f(x) dx$.

zu (c) Nach Teil (a) ist die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ überall monoton wachsend und besteht aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Wir zeigen, dass die Folge der Lebesgue-Integrale $\int_{\mathbb{R}} f_m(t) dt$ beschränkt ist. Sei dazu $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Das Riemann-Integral von $f_m|_{I_m}$ stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_m(t) dt &= \int_{I_m} f_m(t) dt = \int_{-m}^m \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan(t)]_{-m}^m = \\ \arctan(m) - \arctan(-m) &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \pi, \end{aligned}$$

wobei die „ $\leq$ “-Ungleichung wegen $\arctan'(t) = \frac{1}{t^2+1} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zu Stande kommt. Der Satz von Beppo Levi kann also angewendet werden, und liefert eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegen die die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall konvergiert. Weil $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ überall punktweise gegen f konvergiert, sind f und g fast überall gleich. Also ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} g(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_m(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} (\arctan(m) - \arctan(-m)) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \pi. \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 4. (3+4+3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2 - \bar{z} + 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

- (a) Zerlegen Sie die Funktion f in Real- und Imaginärteil, d.h. geben Sie Funktionen $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $f = g + ih$ gilt.
- (b) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_{\partial B_1(0)} f(z) dz$.
(Dabei ist $\partial B_1(0)$ wie immer eine Kurzschreibweise für den Integrationsweg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Die Kreisscheibe vom Radius 1 um den Nullpunkt wird gegen den Uhrzeigersinn umlaufen.)
- (c) Weisen Sie nach, dass f in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Hinweis: In Teil (b) kann durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes Schreibarbeit gespart werden.

Lösung:

zu (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ gilt

$$z^2 - \bar{z} + 1 = (x + iy)^2 - (x - iy) + 1 = (x^2 + 2ixy - y^2) - (x - iy) + 1 = (x^2 - y^2 - x + 1) + i(2xy + y).$$

Die gesuchten Funktionen sind also gegeben durch $g(x + iy) = x^2 - y^2 - x + 1$ und $h(x + iy) = 2xy + y = (2x + 1)y$.

zu (b) Für den Integrationsweg $\gamma = \partial B_1(0)$ gilt $\gamma(t) = e^{it}$, $\bar{\gamma}(t) = e^{-it}$ und $\gamma'(t) = ie^{it}$. Die Funktion $g(z) = z^2 + 1$ ist als Polynomfunktion holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt deshalb $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$. Wegen $f(z) = g(z) - \bar{z}$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (g(z) - \bar{z}) dz = \int_{\gamma} g(z) dz - \int_{\gamma} \bar{z} dz = 0 - \int_{\gamma} \bar{z} dz = \\ &= - \int_0^{2\pi} \bar{\gamma}(t) \gamma'(t) dt = - \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it} dt = - \int_0^{2\pi} i dt = -2\pi i. \end{aligned}$$

zu (c) Wäre $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ein Punkt, in dem f holomorph ist, dann müssten in z die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt sein, insbesondere müsste $\frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z)$ gelten. Tatsächlich aber gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 - x + 1) = 2x - 1, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(z) = \frac{\partial}{\partial y}((2x + 1)y) = 2x + 1$$

und $2x - 1 \neq 2x + 1$. (Andernfalls könnte man $2x$ auf beiden Seiten subtrahieren und würde $-1 = 1$ erhalten.)

Name: _____

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\partial B_r(0)} f(z) dz$ der Funktion

$$f(z) = \frac{3z+5}{(z-3)(z+5)} \quad \text{für } r \in \{2, 4, 6\}.$$

(b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ der Integrationsweg gegeben durch $\gamma(t) = e^{-5it}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z} dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz.$$

Lösung:

zu (a) Wegen $|3| = 3 > 2$ und $|-5| = 5 > 2$ sind die Nullstellen 3 und -5 des Nennerpolynoms nicht in $\bar{B}_2(0)$ enthalten. Für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist f also auf $B_{2+\varepsilon}(0)$ eine holomorphe Funktion, und der Cauchysche Integralsatz liefert $\int_{\partial B_2(0)} f(z) dz = 0$.

Die Funktion $g(z) = \frac{3z+5}{z+5}$ ist wegen $|-5| > 4$ auf $B_{4+\varepsilon}(0)$ holomorph für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, und wegen $|3| < 4$ gilt $3 \in B_4(0)$. Somit kann die Cauchysche Integralformel angewendet werden und liefert

$$\int_{\partial B_4(0)} f(z) dz = \int_{\partial B_4(0)} \frac{g(z)}{z-3} dz = 2\pi i g(3) = 2\pi i \cdot \frac{3 \cdot 3 + 5}{3 + 5} = \frac{7}{2}\pi i.$$

Wegen $|3| < 6$ und $|-5| = 5 < 6$ sind die Singularitäten 3 und -5 in der Kreisscheibe $B_6(0)$ enthalten. Die Umlaufzahlen der Kurve $\gamma = \partial B_6(0)$ sind somit gegeben durch $n(\gamma, 3) = n(\gamma, -5) = 1$. Da es sich bei 3 und -5 um Polstellen 1. Ordnung von f handelt und wegen $f(z) = (z-3)^{-1} \frac{3z+5}{z+5} = (z+5)^{-1} \frac{3z+5}{z-3}$ erhält man die Residuen durch $\text{res}_{z=3} f(z) = \frac{3 \cdot 3 + 5}{3 + 5} = \frac{7}{4}$ und $\text{res}_{z=-5} f(z) = \frac{3 \cdot (-5) + 5}{(-5) - 3} = \frac{5}{4}$. Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_6(0)} f(z) dz &= 2\pi i \cdot (n(\gamma, 3) \text{res}_{z=3} f(z) + n(\gamma, -5) \text{res}_{z=-5} f(z)) = \\ &= 2\pi i \left(1 \cdot \frac{7}{4} + 1 \cdot \frac{5}{4} \right) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i. \end{aligned}$$

zu (b) Auch diese beiden Integrale berechnen wir mit dem Residuensatz. Setzen wir $f(z) = \frac{1}{z}(e^z - 1)$ und $g(z) = \frac{1}{z} \cdot e^z$, dann gilt $\text{res}_{z=0} f(z) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ und $\text{res}_{z=0} g(z) = e^0 = 1$. Die Singularität 0 der beiden Funktionen ist in der offenen Kreisscheibe $B_1(0)$ enthalten, und γ umläuft die Kreisscheibe fünfmal in negativer Umlaufrichtung (mit dem Uhrzeigersinn). Für die Umlaufzahl gilt deshalb $n(\gamma, 0) = -5$, und wir erhalten $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, 0) \cdot \text{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot (-5) \cdot 0 = 0$ sowie $\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, 0) \cdot \text{res}_{z=0} g(z) = 2\pi i \cdot (-5) \cdot 1 = -10\pi i$.

Name: _____

Aufgabe 6. (3+7 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ sowie deren Typ.
- (b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die beiden isolierten Singularitäten aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie die Laurentreihen-Entwicklungen der Funktion f um diese beiden Punkte. Geben Sie also gelochte Kreisscheiben $K_{0,r}(\alpha)$ und $K_{0,s}(\beta)$ mit $r, s \in \mathbb{R}^+$ und $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ an, so dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n \quad \text{bzw.} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-\beta)^n$$

für alle $z \in B_r(\alpha)$ bzw. $z \in B_s(\beta)$ erfüllt ist.

Lösung:

zu (a) Die Zerlegung $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ zeigt, dass $\pm 2i$ die beiden einzigen isolierten Singularitäten der Funktion f sind. Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z+4i}$ ist in einer offenen Umgebung von $2i$ holomorph und hat in $2i$ keine Nullstelle. Die Zerlegung $f(z) = (z - 2i)^{-1} \frac{1}{z+2i}$ zeigt somit, dass $2i$ eine Polstelle 1. Ordnung von f ist, und genauso sieht man, dass $-2i$ eine Singularität desselben Typs ist.

zu (b) Die Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2i} &= \frac{1}{(z-2i)+4i} = \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4i}(z-2i)} = \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4i})(z-2i)} \\ &= (-\frac{1}{4}i) \frac{1}{1 - \frac{1}{4}i(z-2i)} = (-\frac{1}{4}i) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4}i)^n (z-2i)^n \end{aligned}$$

liefert für die Funktion f die Darstellung

$$f(z) = (-\frac{1}{4}i) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4}i)^n (z-2i)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -(\frac{1}{4}i)^{n+1} (z-2i)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} -(\frac{1}{4}i)^{n+2} (z-2i)^n.$$

Die gesuchten Laurent-Koeffizienten sind also gegeben durch $a_n = 0$ für $n \leq -2$ und $a_n = -(\frac{1}{4}i)^{n+2}$ für $n \geq -1$. Ebenso liefert die Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2i} &= \frac{1}{(z+2i)-4i} = -\frac{1}{4i-(z+2i)} = (-\frac{1}{4i}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4i}(z+2i)} = \frac{1}{4}i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4i})^n (z+2i)^n \\ &= \frac{1}{4}i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{4}i)^n (z+2i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{4}i)^{n+1} (z+2i)^n \end{aligned}$$

für die Funktion f die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{4}i)^{n+1} (z+2i)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{1}{4}i)^{n+2} (z+2i)^n.$$

Damit erhalten wir die Laurent-Koeffizienten $b_n = 0$ für $n \leq -2$ und $b_n = (-1)^{n+1} (\frac{1}{4}i)^{n+2} = -(-\frac{1}{4}i)^{n+2}$ für $n \geq -1$. Die Laurentreihen-Darstellung um den Punkt $2i$ ist gültig auf der gelochten Kreisscheibe $K_{0,4}(2i)$, denn 4 ist die maximale reelle Zahl r mit der Eigenschaft $-2i \notin K_{0,4}(2i)$. Ebenso sieht man, dass die Laurentreihen-Darstellung um den Punkt $-2i$ auf $K_{0,4}(-2i)$ gültig ist.

Anmerkung:

In der Aufgabendarstellung war von offenen Kreisscheiben $B_r(\alpha)$ und $B_s(\beta)$ die Rede. Das war nicht korrekt: In der Singularität selbst, also in α bzw. β , ist die Laurentreihen-Entwicklung natürlich nicht gültig.

Name: _____

Aufgabe 7. (2+6+2 Punkte)

Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{-3\}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n+1}{3n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Bestimmen Sie $f(0)$, und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- (b) Bestimmen Sie $f(z)$ für alle $z \in G$ mit Hilfe des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen.
- (c) Begründen Sie, dass es keine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g|_G = f$ gibt.

Lösung:

zu (a) Als holomorphe Funktion ist f insbesondere im Nullpunkt stetig. Deshalb gilt

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

zu (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$, außerdem $f(0) = \frac{2+0}{3+0}$. Dies zeigt, dass f auf der Menge $N = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ mit der Funktion $h : G \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{2+z}{3+z}$ übereinstimmt. Als rationale Funktion (Quotient zweier Polynomfunktionen) ist h auf G holomorph. Außerdem ist N eine nicht-diskrete Teilmenge von G , denn wegen $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ sind in jeder Umgebung von $0 \in N$ unendliche viele Elemente aus N enthalten. Insgesamt sind damit alle Voraussetzungen des Identitätssatzes erfüllt, und es folgt $f(z) = h(z) = \frac{2+z}{3+z}$ für alle $z \in G$.

zu (c) Würde eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g|_G = f$ existieren, dann wäre -3 eine hebbare Singularität von f . Aber $z \mapsto 2+z$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ohne Nullstelle im Punkt -3 , und somit zeigt die Zerlegung $f(z) = (z - (-3))^{-1}(2+z)$, dass -3 eine Polstelle 1. Ordnung von f im Punkt -3 ist, also insbesondere *keine* hebbare Singularität.

Name: _____

Aufgabe 8. (2+4+4 Punkte)

Wir betrachten das System von Differenzialgleichungen gegeben durch

$$y'_0 = y_1 + y_2 \quad , \quad y'_1 = y_2 + 1 \quad , \quad y'_2 = x^3 - x + 7.$$

- (a) Überführen Sie das System in Matrixform, d.h. geben Sie eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ und eine Funktion $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, so dass das System in der Form $y' = Ay + b(x)$ geschrieben werden kann.
- (b) Sei nun $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Systems. Zeigen Sie, dass φ_0 eine DGL dritter Ordnung erfüllt, und geben Sie diese an.
- (c) Bestimmen Sie eine Lösung $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL

$$y' = \frac{x^2 + 1}{y^2}$$

mit $\psi(3) = 6$.

Lösung:

zu (a) Die angegebene Gleichung wird erfüllt durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x^3 - x + 7 \end{pmatrix}.$$

zu (b) Weil φ eine Lösung des Systems ist, gilt $\varphi'_0(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $\varphi'_1(x) = \varphi_2(x) + 1$ und $\varphi'_2(x) = x^3 - x + 7$. Damit erhalten wir

$$\varphi''_0(x) = \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x) = \varphi_2(x) + \varphi'_2(x) + 1$$

und

$$\varphi'''_0(x) = \varphi'_2(x) + \varphi''_2(x) = (x^3 - x + 7) + (3x^2 - 1) = x^3 + 3x^2 - x + 6.$$

Dies zeigt, dass φ_0 eine Lösung der DGL $y''' = x^3 + 3x^2 - x + 6$ ist.

zu (c) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen, also können wir das entsprechende Lösungsverfahren anwenden. Wir definieren

$$F(x) = \int_3^x (t^2 + 1) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + t \right]_3^x = \frac{1}{3}x^3 + x - 12$$

und

$$G(y) = \int_6^y t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_6^y = \frac{1}{3}y^2 - 72.$$

Die Umformung $\frac{1}{3}y^3 - 72 = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = x + 72 \Leftrightarrow y^3 = 3x + 216 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3x + 216}$ zeigt, dass $H(x) = \sqrt[3]{3x + 216}$ die Umkehrfunktion von G ist. Somit ist $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (H \circ F)(x)$ mit

$$(H \circ F)(x) = \sqrt[3]{3F(x) + 216} = \sqrt[3]{3\left(\frac{1}{3}x^3 + x - 12\right) + 216} = \sqrt[3]{x^3 + 3x + 180}$$

eine Lösung der DGL mit $\psi(3) = 6$.