LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022
6. Oktober 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (4+6 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge A gegeben durch

$$A \quad = \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| \le 2, |y| \le 2, |x+y| \le 2\}.$$

(Es handelt sich um ein nicht-regelmäßiges Sechseck. Fertigen Sie eventuell zur Orientierung eine Skizze an.)

(a) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $A(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$ von $\mathbb{R}$. (Dies ist ein endliches, abgeschlossenes Intervall, ein einzelner Punkt in $\mathbb{R}$ oder die leere Menge.)

(b) Berechnen Sie durch Verwendung des Ergebnisses aus Teil (a) den Flächeninhalt $v_2(A)$ der Menge A.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Teilmenge H gegeben durch

$$H \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x \geq 0 \;,\; 0 \leq z \leq 3 \;,\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten-Abbildung $\rho_{\text{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(r,h,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ das Integral

$$\int_H \frac{xz}{x^2+y^2}\, d(x,y,z).$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die punktweise gegen f konvergiert. Dabei soll für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall $I_n \subseteq \mathbb{R}$ existieren, so dass jeweils $f_n(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus I_n$ gilt. Ein Nachweis dieser Eigenschaften ist *nicht* erforderlich.

(b) Formulieren Sie den Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz.

(c) Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist, und bestimmen Sie das Lebesgue-Integral von f. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Funktion f die Ableitung der Arkus tangens-Funktion ist, und dass

$$\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{gilt.}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (3+4+3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2 - \bar{z} + 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(a) Zerlegen Sie die Funktion f in Real- und Imaginärteil, d.h. geben Sie Funktionen $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ an, so dass $f = g + ih$ gilt.

(b) Berechen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_{\partial B_1(0)} f(z)\, dz$.
(Dabei ist $\partial B_1(0)$ wie immer eine Kurzschreibweise für den Integrationsweg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. Die Kreisscheibe vom Radius 1 um den Nullpunkt wird gegen den Uhrzeigersinn umlaufen.)

(c) Weisen Sie nach, dass f in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Hinweis: In Teil (b) kann durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes Schreibarbeit gespart werden.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\partial B_r(0)} f(z)\,dz$ der Funktion

$$f(z) \quad = \quad \frac{3z+5}{(z-3)(z+5)} \quad \text{für} \quad r \in \{2,4,6\}.$$

(b) Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ der Integrationsweg gegeben durch $\gamma(t) = e^{-5it}$ für alle $t \in [0,2\pi]$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z}\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz.$$

Name: ____

Aufgabe 6. (3+7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ sowie deren Typ.

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die beiden isolierten Singularitäten aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie die Laurentreihen-Entwicklungen der Funktion f um diese beiden Punkte. Geben Sie also gelochte Kreisscheiben $K_{0,r}(\alpha)$ und $K_{0,s}(\beta)$ mit $r, s \in \mathbb{R}^+$ und $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ an, so dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n \qquad \text{bzw.} \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-\beta)^n$$

für alle $z \in K_{0,r}(\alpha)$ bzw. $z \in K_{0,s}(\beta)$ erfüllt ist.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (2+6+2 Punkte)

Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{-3\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f(\tfrac{1}{n}) \quad = \quad \frac{2n+1}{3n+1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie $f(0)$, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

(b) Bestimmen Sie $f(z)$ für alle $z \in G$ mit Hilfe des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen.

(c) Begründen Sie, dass es keine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g|_G = f$ gibt.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (2+4+4 Punkte)

Wir betrachten das System von Differenzialgleichungen gegeben durch

$$y_0' = y_1 + y_2 \quad , \quad y_1' = y_2 + 1 \quad , \quad y_2' = x^3 - x + 7.$$

(a) Überführen Sie das System in Matrixform, d.h. geben Sie eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ und eine Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ an, so dass das System in der Form $y' = Ay + b(x)$ geschrieben werden kann.

(b) Sei nun $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Systems. Zeigen Sie, dass φ_0 eine DGL dritter Ordnung erfüllt, und geben Sie diese an.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der DGL

$$y' = \frac{x^2 + 1}{y^2}$$

mit $\psi(3) = 6$.