§ 13. Der Satz von Fubini

Satz (13.1)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, und sei $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Quader $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in P$ sei die Funktion $f_x : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_x(y) = f(x, y)$. Dann sind die Funktionen

$$f_\star : P \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \int_{Q\star} f_x(y)\ dy$$

und

$$f^\star : P \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \int_Q^\star f_x(y)\ dy$$

beide Riemann-integrierbar, und es gilt

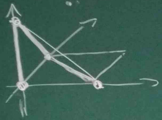
$$\int_{P \times Q} f(x, y)\ d(x, y) = \int_P \left(\int_{Q\star} f_x(y)\ dy \right) dx = \int_P \left(\int_Q^\star f_x(y)\ dy \right) dx.$$

Anwendungsbeispiele für den Satz von Fubini

- $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,d(x,y) = \frac{1}{4}$
- Volumen des Simplex
- Volumen der Einheitskugel

Berechnung des Simplexvolumens

Simplex $S = \{ (x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x+y+z \leq 1 \}$



Die Menge S stimmt überein mit dem Volumen unter dem Graphen der Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1-x-y & \text{falls } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $0 \leq x \leq 1$ ist $f_x(y) = f(x,y)$ jeweils geg. durch $f_x(y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{für } 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_x(y)\, dx = \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy + \int_{1-x}^1 0 \, dy =$$

$2\int_2 x \quad \ldots \quad [\arctan(x)]_1 \qquad f(x)=\frac{1}{x},\ f(x)=x^2+1$

$$\left[y - xy - \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} = \left((1-x) - x(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2\right) - 0$$

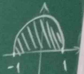
$$= 1 - \cancel{x} - \cancel{x} + \cancel{x^2} - \tfrac{1}{2} + \cancel{x} - \tfrac{1}{2}\cancel{x^2} = \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}$$

Fubini $\Rightarrow \displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(y)\,dy\right)dx =$

$$\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}\right)dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x\right]_0^1 = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{6}}}$$

Berechnung des Kugelvolumens

Analysis einer Variablen $\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi$



Substitutionsregel $\Rightarrow$

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = r\int_{-r}^r \sqrt{1-\left(\tfrac{x}{r}\right)^2}\,dx = r^2\int_{-r}^r \tfrac{1}{r}\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{r}\right)^2}\,dx$$

$$= r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi r^2$$

↑ Subst-regel mit Subst-fkt. $\varphi(x) = \frac{x}{r}$

Erinnerung Substitutionsregel:

$f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: J \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit

$\varphi(J) \subseteq I$ $\quad \int_a^b (f \circ \varphi)(x)\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx$

Beispiel: $\int_1^2 \frac{x+5}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x+10}{x^2+1}\, dx =$

$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int_1^2 \frac{5}{x^2+1}\, dx =$ ↑ Subst-regel angew. auf $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = x^2+1$

$\frac{1}{2} \int_2^5 \frac{dx}{x} + 5\,[\arctan(x)]_1^2$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(x)\right]_2^5 + 5\left[\arctan(x)\right]_1^2 =$

$\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) + 5\arctan(2) - 5\arctan(1)$

Erinnerung partielle Integration: $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

$$\int_a^b \underset{\uparrow}{f'(x)}\, \underset{\downarrow}{g(x)}\, dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Bsp: $\displaystyle\int_2^3 \underset{\downarrow}{x^2}\, \underset{\uparrow}{e^{-x}}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ f(x) = e^{-x} \\ g(x) = x^2}}{=} \left[-x^2 e^{-x}\right]_2^3 - \int_2^3 2x\,(-e^{-x})\,dx$

$\displaystyle = \left[-x^2 e^{-x}\right]_2^3 + \int_2^3 \underset{\downarrow}{\underbrace{2x}}\, \underset{\uparrow}{e^{-x}}\, dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_2^3 + \left[2x(-e^{-x})\right]_2^3$

$\displaystyle - \int_2^3 2(-e^{-x})\,dx = \left[-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}\right]_2^3$

$$= -17e^{-3} + 10e^{-2}$$

$$\int_1^a \ln(x)\,dx = \int_1^a 1 \cdot \ln(x)\,dx = \left[x \ln(x)\right]_1^a - \int_1^a x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

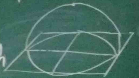
$$= \left[x \ln(x)\right]_1^a - \int_1^a 1\,dx = \left[x \ln(x) - x\right]_1^a$$

$$= (a-1)\ln(a)$$

Berechnung des Kugelvolumens (Forts)

Das Halbkugelvolumen ist das Volumen unter dem Graphen der Funktion $f : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ geg durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{falls } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Für $-1 \le x \le 1$ ist $f_x(y) = f(x,y)$ jeweils geg durch

$$f_x(y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{falls } -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anwendung der Formel von oben für $r = \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f_x(y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(1-x^2)-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\pi(1-x^2)$$

Fubini $\Rightarrow \int_{[-1,1]^2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f_x(y)\, dy \right) dx$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\pi(1-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} =$$

$$\frac{1}{2}\pi \left(\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) \right) = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Das Volumen der Vollkugel ist somit $2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

§ 14. Nullmengen und Lebesguesches Integrabilitätskriterium

Definition (14.1)

- Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine abzählbare Familie $(K_i)_{i \in I}$ von offenen Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i$ und $\sum_{i \in I} v(K_i) < \varepsilon$ existiert.

- Findet man für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sogar eine endliche Familie von offenen Quadern mit diesen Eigenschaften, dann sprechen wir von einer Jordanschen Nullmenge.

Eigenschaften von Nullmengen

Proposition (14.2)

(i) Gilt $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist B eine Nullmenge, dann ist auch A eine Nullmenge. Ist B sogar eine Jordansche Nullmenge, dann ist auch A eine Jordansche Nullmenge.

(ii) Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge, und jede endliche Menge ist eine Jordansche Nullmenge.

(iii) Endliche Vereinigungen von Jordanschen Nullmengen sind Jordansche Nullmengen. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

(iv) Eine kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie eine Jordansche Nullmenge ist.

Beispiele für (Jordansche) Nullmengen:

(i) Endliche Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind Jordansche Nullmengen

Sei $S = \{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ sei $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit

$p_i \in Q_i$ und $v(Q_i) < \frac{\varepsilon}{m}$; z.B.: Ist $p_i = (a_1, \dots, a_n)$.

Setze $Q_i =]a_1 - r, a_1 + r[\times \dots \times]a_m - r, a_m + r[$

mit $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $(2r)^n < \frac{\varepsilon}{m} \iff r^n < 2^{-n} \frac{\varepsilon}{m}$

$\iff r < \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{m}}$. Es gilt dann $\bigcup_{i=1}^{m} Q_i \supseteq S$

und $\sum_{i=1}^{m} v(Q_i) < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$.

(ii) Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar unendlich, dann ist S
eine Nullmenge, aber im Allg. keine Jordansche Nullmenge.
Sei $S = \{p_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ mit $p_m \in \mathbb{R}^n$ $\forall m \in \mathbb{N}$
und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Wähle für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen
Quader Q_m mit $v(Q_m) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \varepsilon$ und $p_m \in Q_m$.
Dann gilt $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supseteq S$ und $\sum_{m=1}^{\infty} v(Q_m) =$
$\frac{1}{2}\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.
Zum Beispiel ist $S = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine Jordansche
Nullmenge in $\mathbb{R}^2$, da S nicht durch endlich viele
Quader überdeckt werden kann.

Das Lebesguesche Integrierbarkeitskriterium

Satz (14.6)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U \subseteq Q$ die Teilmenge der Punkte, in denen f unstetig ist. Dann sind äquivalent

(i) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.

(ii) Die Menge U ist eine Nullmenge.

Beispiel zum Lebesgue'schen Integrierbarkeitstest.

Betrachte $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x+y \le 1 \\ 5 & \text{falls } x+y > 1 \end{cases}$

Menge der Unstetigkeitsstellen

$$U = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x+y = 1\}$$

(ist Jordansche Nullmenge)

$$f_x(y) = \begin{cases} 3 & y \le 1-x \\ 5 & y > 1-x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f_x(y)\,dy = \int_0^{1-x} 3\,dy + \int_{1-x}^{1} 5\,dy$$

$$= [3y]_0^{1-x} + [5y]_{1-x}^{1} = 3(1-x) + 5x$$

$$\int_0^1 \big(3(1-x) + 5x\big)\,dx = \left[3x - \tfrac{3}{2}x^2 + 5 \cdot \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = [3x + x^2]_0^1$$

$$= 4$$