Die Darstellungsmatrix der zweiten Ableitung

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

- Wie wir bereits wissen, kann die Ableitung $f'(a)$ als $(n \times 1)$-Matrix dargestellt werden.
- Die zweite Ableitung $f''(a)$ ist eine bilineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$.
- Die Darstellungsmatrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ dieser Bilinearform hat nach Prop. (9.5) die Einträge

  $$a_{ij} = f''(a)(e_i, e_j) = \partial_{ij} f(a)$$

  für $1 \leq i, j \leq n$.
- Sie wird die Hesse-Matrix von f an der Stelle a genannt und mit $\mathscr{H}(f)(a)$ bezeichnet.

Approximation zweiter Ordnung

Folgerung (9.7)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$ ein Punkt, in dem f zweimal differenzierbar ist. Dann gibt es eine Funktion $\psi : U_a \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2}\,{}^{\mathrm{t}}h \cdot \mathscr{H}(f)(a) \cdot h + \psi(h)$$

und $\lim\limits_{h \to 0} \|h\|^{-2}\,\psi(h) = 0$.

Eigenschaften symmetrischer Matrizen

Definition (9.10)

Wir bezeichnen eine symmetrische Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ als

- positiv definit, wenn ${}^{\mathrm{t}}vAv > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, als
- negativ definit, wenn ${}^{\mathrm{t}}vAv < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, als
- positiv semidefinit, wenn ${}^{\mathrm{t}}vAv \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, und als
- negativ semidefinit, wenn ${}^{\mathrm{t}}vAv \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Eine Matrix, die weder positiv noch negativ semidefinit ist, bezeichnen wir als indefinit.

Hinreichendes Kriterium für Extrema

Satz (9.11)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a \in U$ eine kritische Stelle von f.

- Ist $\mathscr{H}(f)(a)$ positiv definit, dann besitzt f in a ein isoliertes lokales Minimum.
- Ist $\mathscr{H}(f)(a)$ negativ definit, dann besitzt f in a ein isoliertes lokales Maximum.
- Ist $\mathscr{H}(f)(a)$ indefinit, dann hat f in a kein lokales Extremum.

a kein lokales Minimum $\square$

Beweis von Satz (9.11), letzter Punkt

Vor.: $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ mit $f'(a) = 0$, $\mathcal{H}(f)(a)$ indefinit

z.zg.: a ist <u>kein</u> lokales Extremum

Sei $A = \mathcal{H}(f)(a) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$. A indefinit $\Rightarrow \exists v, w \in \mathbb{R}^n$ mit ${}^t v A v > 0$, ${}^t w A w < 0$. Sei $h \in \{v, w\}$

Taylor-Approximation $\Rightarrow$

$$f(a+th) = f(a) + \tfrac{1}{2}\,{}^t(th)A(th) + \varphi(th)$$

mit $\lim\limits_{t \to 0} t^{-2}\varphi(th) = 0$ (*)

Wegen (*) gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle

$t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$ jeweils $|\varphi(th)| < \frac{1}{4} t^2 |{}^t h A h|$
wobei $h \in \{v, w\}$. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit $|t| < \varepsilon$ also

$$f(a+tv) = f(a) + \frac{1}{2} t^2 ({}^t v A v) + \varphi(tv)$$
$$> f(a) + \frac{1}{2} t^2 ({}^t v A v) - \frac{1}{4} t^2 |{}^t v A v|$$
$$= f(a) + \frac{1}{4} t^2 ({}^t v A v) > f(a).$$

$\Rightarrow$ In jeder noch so kleinen Umg. von a gibt es einen Punkt $b = a + tv$ ($|t|$ hinr. klein) mit $f(b) > f(a)$.

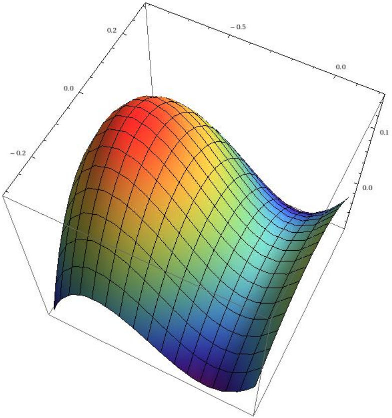
$\Rightarrow$ a kein lokales Maximum.

Dieselbe Rechnung mit w statt v liefert: a kein lokales Minimum.

$\square$

Beispiel 1

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$



lokales Maximum

Beispiel 1: $f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$

Bestimmung der kritischen Punkte

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3x^2+2x & (x-1)2y \end{pmatrix}$$

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt also

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \iff y^2+3x^2+2x = (x-1)2y = 0$$

$$\iff ((x=1) \text{ oder } (y=0)) \text{ und } (y^2+3x^2+2x) = 0$$

$$\iff ((x=1) \text{ und } (y^2+5=0)) \text{ oder } ((y=0) \text{ und } 2x(\tfrac{3}{2}x+1)=0)$$

$$\iff (x,y) \in \{(0,0), (-\tfrac{2}{3},0)\}$$

Es gibt also zwei kritische Stellen

$$\mathcal{H}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x,y) & \partial_{12} f(x,y) \\ \partial_{21} f(x,y) & \partial_{22} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & x-1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{H}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, da ${}^t e_1 \mathcal{H}(f)(0,0) e_1 = 2 > 0$, ${}^t e_2 \mathcal{H}(f)(0,0) e_2 = -1 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ ist kein lok. Extremum

$\mathcal{H}(f)(-\frac{2}{3},0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5/3 \end{pmatrix}$ negativ definit, denn ${}^t v \mathcal{H}(f)(-\frac{2}{3},0) v =$

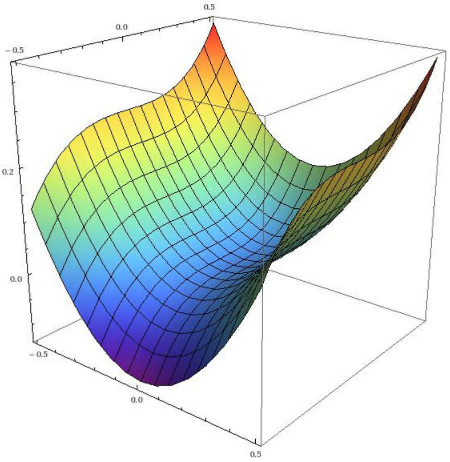
für jedes $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ gilt

$$(v_1\ v_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -2v_1^2 - \frac{5}{3} v_2^2 < 0$$

$\Rightarrow (-\frac{2}{3}, 0)$ ist lokales Maximum

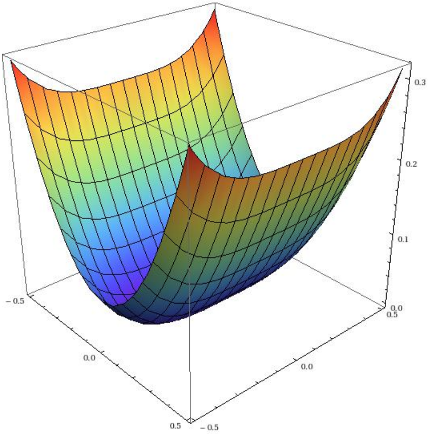
Beispiel 2

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$



Beispiel 3

$g(x, y) = x^2 + y^4$



weitere Beispiele: $g(x,y) = x^2 + y^3$ $\quad h(x,y) = x^2 + y^4$

$g'(x,y) = (2x \;\; 3y^2)$, $h'(x,y) = (2x \;\; 4y^3)$

$\Rightarrow$ g, h haben beide nur eine krit. Stelle, nämlich $(0,0)$

$\Rightarrow$ lok. Extremum nur in $(0,0)$ möglich

$\mathcal{H}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{H}(h)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{H}(h)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind positiv semidefinit $\Rightarrow$ keine Aussage über ein lok. Extremum in $(0,0)$ möglich

Weiteres notwendiges Kriterium für Extrema

Satz (9.12)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $a \in U$ ein kritischer Punkt von f und $A = \mathscr{H}(f)(a)$.

- Besitzt f bei a ein lokales Minimum, dann ist A positiv semidefinit.
- Besitzt f bei a ein lokales Maximum, dann ist A negativ semidefinit.

§ 10 Lokale Umkehrbarkeit und implizit definierte Funktionen

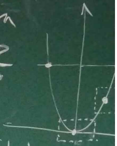
Definition (10.1)

Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge.

- Eine stetig (total) differenzierbare Abbildung $f : U \to W$ wird auch $\mathscr{C}^1$-Abbildung genannt.
- Ist f eine Bijektion auf eine offene Teilmenge $\tilde{W} \subseteq W$, und ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : \tilde{W} \to U$ ebenfalls ein $\mathscr{C}^1$-Abbildung, dann spricht man von einem $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen U und $\tilde{W}$.

Frage: Was bedeutet es, dass eine Funktion

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ „lokal" umkehrbar ist?



Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2$

f ist nicht umkehrbar, hat also keine Umkehrfkt., da f nicht injektiv ist (z.B. $f(-1) = 1 = f(1)$)

aber: f ist in einer hinreichend kleinen offenen Umg. jedes Punktes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokal umkehrbar, das bedeutet: Sind I, I' hinreichend kleine offene Intervalle mit $a \in I$, $f(a) \in I'$, dann besitzt $f|_I : I \to I'$ eine Umkehrfkt.

Bsp: $a = 1$ Setze $I =]0,2[$, $I' =]0,4[$, dann hat $f|_I : I \to I'$, $x \mapsto x^2$ die Umkehrfkt.

$f(a) \in I'$, dann besitzt $f|_I : I \to I'$ eine Umkehrfkt.

$g : I' \to I, \; x \mapsto \sqrt{x}$

__Bsp.__ $a = -1$ Setze $I = \,]-2,0[\,$, $I' = \,]0,4[\,$, dann hat $f|_I : I \to I', \; x \mapsto x^2$ die Umkehrfkt

$g : I' \to I, \; x \mapsto -\sqrt{x}$

__aber:__ In keiner Umg. von $a = 0$ ist f lokal umkehrbar

Grund: I offenes Intervall mit $0 \in I \Rightarrow \exists \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\pm\varepsilon \in I$ $\quad f(\varepsilon) = f(-\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow f|_I$ nicht injektiv

__Beobachtung:__ $f'(x) = 2x \qquad f'(a) = 0$ für $a = 0$

$f'(a) \neq 0$ für $a \neq 0$

Der Schrankensatz

Satz (10.2)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung und die Konstante $\gamma_U \in \mathbb{R}^+$ gegeben durch $\gamma_U = \sup\{\|f'(x)\| \mid x \in U\}$, dann gilt

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \gamma_U \|x_1 - x_2\|$$

für alle $x_1, x_2 \in U$ mit der Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke $[x_1, x_2]$ in U enthalten ist.

Dabei wird auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Supremumsnorm zu Grunde gelegt, und $\|f'(x)\|$ bezeichnet die entsprechende Operatornorm von $f'(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Beweis von Satz (10.2)

geg: $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$\gamma_U = \sup \{ \|f'(x)\| \mid x \in U \} \in \mathbb{R}^+$

$x_1, x_2 \in U$ mit $[x_1, x_2] \subseteq U$ z.zg: $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \gamma_U \|x_1 - x_2\|$

$f = (f_1, \dots, f_m) \Rightarrow f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_m'(a)) \ \forall a \in U$

Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f_j'(a)(v)| \leq \max\{ |f_j'(a)| \mid 1 \leq j \leq m \}$

$= \|f'(a)(v)\| \underset{\|f'(a)\| \leq \gamma_U}{\leq} \gamma_U \|v\|$

Seien $x_1, x_2 \in U$ wie angeg. und $v = x_2 - x_1$. $\Rightarrow \exists a_j \in [x_1, x_2]$ mit

Mittelwertsatz für Richtungsabl. $\Rightarrow f_j'(a)(v) = f_j(x_2) - f_j(x_1)$

$\partial_v f_j(a) = f_j(x_2) - f_j(x_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \; | f_j(x_1) - f_j(x_2) | = | f_j'(a)(v) | \leq \gamma_u \|v\| .$$

jeweils für $1 \leq j \leq m \;\Rightarrow\; \| f(x_1) - f(x_2) \| \leq \gamma_u \|v\| = \gamma_u \|x_2 - x_1\|$ $\square$

Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz (10.3)

Sei $f : U \to W$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Ist $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass $f'(a) \in \mathscr{L}(V, W)$ bijektiv ist, dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von a und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq W$ von $b = f(a)$ mit der Eigenschaft, dass durch $f|_{\tilde{U}}$ $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ definiert ist.

Beweis von Satz (10.3)

nur für $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^n$, $a = f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Voraussetzungen also: $f: U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-Abb., wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0_{\mathbb{R}^n} \in U$, so dass $f'(0_{\mathbb{R}^n})$ invertierbar

z. zg.: $\exists$ offene Umg $\tilde{U}$, $\tilde{W}$ von $0_{\mathbb{R}^n}$, so dass $f(\tilde{U}) = \tilde{W}$ und $f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \to \tilde{W}$ bijektiv, mit stetig diff'barer Umkehrfkt. $g: \tilde{W} \to \tilde{U}$

Rückführung auf den Fall $f'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$:

Ist $\phi := f'(0_{\mathbb{R}^n})$ eine beliebige invertierbare lineare Abbildung, dann definiere $\tilde{f} = \phi^{-1} \circ f$.

klar: $\tilde{f}$ erfüllt ebenfalls alle Voraussetzungen, es gilt aber darüber hinaus $\tilde{f}'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, denn:

$$\tilde{f}'(0_{\mathbb{R}^n}) = (\phi^{-1} \circ f)'(0_{\mathbb{R}^n}) = (\phi^{-1})'(f(0_{\mathbb{R}^n})) \circ f'(0_{\mathbb{R}^n})$$

↑ Kettenregel

$$= \phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$