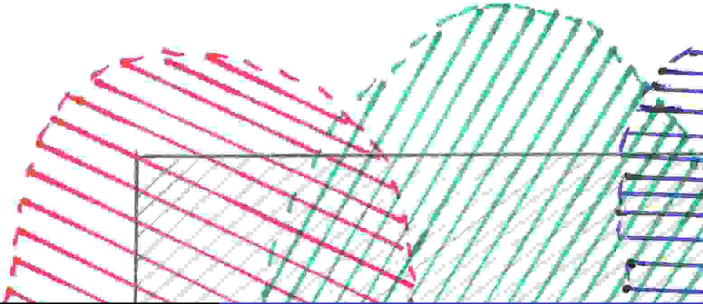
§ 5. Kompaktheit

Definition (5.1)

Sei I eine Menge, (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine offene Überdeckung von A ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A$.



Definition kompakter Teilmengen

Definition (5.2)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird kompakt genannt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, so dass bereits $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq A$ erfüllt ist. Den metrischen Raum selbst bezeichnen wir als kompakt, wenn die Teilmenge $A = X$ in (X, d_X) kompakt ist.

Das Maximumsprinzip

Satz (5.16)

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, wobei X kompakt sei. Dann ist auch die Bildmenge $f(X)$ kompakt.

Satz (5.17)

Jede stetige, reellwertige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten metrischen Raum X ist beschränkt und nimmt auf X ihr Maximum und Minimum an.

Beweis von Satz (5.16)

geg. metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y), wobei (X, d_X) kompakt ist, $f: X \to Y$ stetige Abb.

z.z.g.: $f(X)$ ist kompakt

Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, d.h.
$\bigcup_{i\in I} V_i \supseteq f(X)$

f stetig, $V_i \subseteq Y$ offen $\Rightarrow U_i = f^{-1}(V_i)$ ist offen in X, nach § 5

Beh.: $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq X$ Sei $x \in X$
$\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists\, i \in I: f(x) \in V_i \Rightarrow x \in f^{-1}(V_i) = U_i$ ($\to$ Beh.)

$(U_i)_{i\in I}$ offene Überd. von X, X kompakt $\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberd.
$(U_i)_{i\in J}$ ($J \subseteq I$ endl) $\Rightarrow f(X) = f\left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in J} f(U_i) \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$

$\Rightarrow (V_i)_{i\in J}$ ist endl. Überd. von $f(X)$ $\square$

Beweis von Satz (5.17)

geg (X,d) kompakter metrischer Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig

zzg: f ist beschränkt und nimmt Min/Max. an

Satz (5.16) $\Rightarrow$ $f(X)$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$

Heine-Borel $\Rightarrow$ $f(X)$ ist beschränkt und abgeschl.

$\Rightarrow$ $s = \inf f(X)$, $t = \sup f(X)$ existieren in $\mathbb{R}$

Es gilt $f(X) \subseteq [s,t]$, d.h. f ist beschränkt

Ang $t \notin f(X)$ $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $f(x^{(n)}) > t - \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Bolzano-W. $\Rightarrow$ Nach Übergang zu einer Teilfolge ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ $\Rightarrow$ $f(x) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{(n)})$, $t - \frac{1}{n} < f(x^{(n)}) \leq t$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Sandwich-Lemma

$\Rightarrow f(x) = t \Rightarrow t \in f(X)$ ↯ genauso $s \in f(X)$ $\square$

Kompaktheit und gleichmäßige Stetigkeit

Definition (5.18)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) wird gleichmäßig stetig auf X genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Satz (5.19)

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, wobei X kompakt sei. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig auf X.

Beweis von Satz (5.19)

(X, d_X) kompakter metrischer Raum, (Y, d_Y) metr. Raum

$f: X \to Y$ stetig. z. zg.: f glm. stetig

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. z. zg.: Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x, y \in X$ die Implikation $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ gilt

Sei $a \in X$. f ist stetig in a $\Rightarrow$ Es gibt ein $\delta_a \in \mathbb{R}^+$, so dass $\forall x \in X: d_X(a,x) < \delta_a \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$

Sei jeweils $U_a = B_{\frac{1}{2}\delta_a}(a)$. Dann ist $(U_a)_{a \in X}$ eine offene Überdeckung von X. (X, d_X) kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ endl. Teilüberd. $(U_a)_{a \in J}$ ($J \subseteq X$ endlich)

$(U_a)_{a\in X}$ eine offene Überdeckung von X. (X, d_X) kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ endl. Teilüberd. $(U_a)_{a \in J}$ ($J \subseteq X$ endlich)

Sei nun $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_a \mid a \in J\} \in \mathbb{R}^+$.

Seien $x, y \in X$ mit $d_X(x,y) < \delta$

z.zg.: $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

$(U_a)_{a\in J}$ Überd. $\Rightarrow$ $\exists\, a \in J$ mit $x \in U_a = B_{\frac{1}{2}\delta_a}(a)$

$d_X(x,y) < \frac{1}{2}\delta_a \Rightarrow d_X(a,y) \leq d_X(a,x) + d_X(x,y) < \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_a$

$= \delta_a \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(f(a), f(y))$

$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ $\square$

§ 6. Zusammenhang

Definition (6.1)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird zusammenhängend genannt, wenn es keine disjunkten, nichtleeren, und in A relativ offenen Mengen $U, V \subseteq A$ mit $A = U \cup V$ gibt.

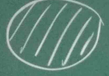
Wir bezeichnen den metrischen Raum (X, d_X) selbst als zusammenhängend, wenn die Teilmenge $A = X$ zusammenhängend ist.

... offen ... $U = A \setminus V$ rel abgeschlossen.

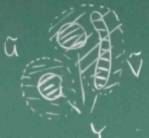
d.h. U zugleich rel. abg und rel. offen. $\emptyset \subsetneq U \subsetneq X$ $\square$

Erinnerung: (X, d) metrischer Raum, $Y \subseteq X$

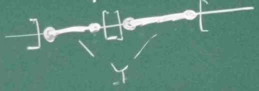
$U \subseteq Y$ ist <u>relativ offen</u> in Y $\iff$ Es gibt eine offene Teilmenge $\tilde{U}$ von X mit $U = Y \cap \tilde{U}$



zusammenhängend



nicht zusammenhängend



Charakterisierung durch zugleich offene und abgeschlossene Teilmengen

Proposition (6.2)

Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d_X) ist genau dann zusammenhängend, wenn $\varnothing$ und A die einzigen Teilmengen von A sind, die sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen in A sind.

Beispiel:
Die Teilmenge $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2\}$ ist nicht zusammenhängend.

Beweis von Prop (62)

geg. metrischer Raum (X,d), $A \subseteq X$

z.zg.: A zshgd $\Longleftrightarrow$ $\emptyset$, A sind die einzigen rel. offenen und rel. abg. Teilmengen von A

„$\Longrightarrow$" Ang. $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, B rel offen und rel. abg. in A.

Setze $U = B$, $V = A \setminus B$ $\Rightarrow$ U rel. offen, B rel. abg

$\Rightarrow V = A \setminus B$ auch rel. offen, $A = U \cup V$ disjunkt.

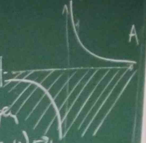
$\emptyset \subsetneq U, V \subsetneq A$ $\Longrightarrow$ A ist nicht zshgd.

„$\Longleftarrow$" Ang. A nicht zshgd $\Rightarrow$ $\exists\, U, V \subseteq A$, rel. offen, $A = U \cup V$,

$U, V \neq \emptyset$ $\quad$ V rel. offen $\Rightarrow$ $U = A \setminus V$ rel abgeschlossen.

d.h. U zugleich rel. abg. und rel. offen. $\emptyset \subsetneq U \subsetneq X$ $\square$

Beh.: $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ ist nicht zusammenhängend



Sei $\tilde{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$, $\tilde{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

$\tilde{U}, \tilde{V}$ sind offen als Urbilder der offenen Teilmengen $]-\infty, 0[$ bzw. $]0, +\infty[$ unter der stetigen Abb. $(x,y) \mapsto y$

$\Rightarrow U = A \cap \tilde{U}$, $V = A \cap \tilde{V}$ sind relativ offen in A

$(-1,-1) \in U$, $(1,1) \in A \setminus U \Rightarrow \emptyset \subsetneq U \subsetneq A$

$(-1,-1) \in A \setminus V$, $(1,1) \in V \Rightarrow \emptyset \subsetneq V \subsetneq A$

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $(x, \frac{1}{x}) \in U$ falls $x < 0$, $(x, \frac{1}{x}) \in V$, falls $x > 0$. $\Rightarrow A = U \cup V$ (disjunkte Vereinigung)

$\Rightarrow$ Beh.

Intervalle sind zusammenhängend

Erinnerung:
Ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $a, b \in I$ auch $[a, b] \subseteq I$ gilt.

Satz (6.3)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, die mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. Genau dann ist M eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, wenn M ein Intervall ist.

Beweis von Satz (6.3) geg. eine mind. 2-elem. Teilm. $M \subseteq \mathbb{R}$

M ist zusammenhängend in $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ M ist Intervall

Bew.: „$\Longrightarrow$" Ang. M ist zshgd., aber kein Intervall.

$\Rightarrow \exists\, a, b \in M$ mit $a < b$ und ein $c \in \,]a, b[$ mit $c \notin M$

Sei $\tilde{U} = \,]-\infty, c[$, $\tilde{V} = \,]c, +\infty[$, offen in $\mathbb{R}$.

Setze $U = M \cap \tilde{U}$, $V = M \cap \tilde{V}$. Diese sind rel. offen in M

$a \in U$, $b \in M \setminus U \Rightarrow \emptyset \subsetneq U \subsetneq M$

$b \in V$, $a \in M \setminus V \Rightarrow \emptyset \subsetneq V \subsetneq M$

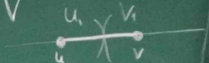
Es gilt $M = U \cup V$, die Vereinigung ist disjunkt da

$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$. $\lightning$ zu M zusammenhängend

„$\Leftarrow$" Vor.: M ist Intervall. ang. M nicht zshgd.

$\Rightarrow \exists$ Zerlegung $M = U \cup V$ in nichtleere, disj., echte, in M relativ offene Teilmengen. Sei $u \in U$, $v \in V$, o.B.d.A. $u < v$

Betrachte $U_1 = [u,v] \cap U$, $V_1 = [u,v] \cap V$



Sei $s = \sup U_1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $u^{(n)} \in U_1$ mit $s - \frac{1}{n} < u^{(n)} \leq s$ Sandwich-L. $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to \infty} u^{(n)} = s$ $\quad (u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in U_1, konvergent in $[u,v]$.

$U_1 \cap [u,v]$ rel abgeschlossen in $[u,v]$, da $V_1 \cap [u,v]$ relativ offen. Aus §5 folgt $s \in U_1$. U_1 rel. offen in $[u,v]$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(s) \cap [u,v] \subseteq U_1 \Rightarrow s + \frac{1}{2}\varepsilon \in U_1$ ↯

da $s = \sup(U_1)$. $\square$

Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen sind stetig

Proposition (6.4)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(A)$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y.

Beweis von Prop. (6.4) geg. metr. Räume (X, d_X), (Y, d_Y), $f: X \to Y$ stetig, $A \subseteq X$ zusammenh. z.zg: $f(A)$ zshgd.

Ang. $f(A)$ ist nicht zshgd $\Rightarrow \exists$ Zerlegung $f(A) = U \cup V$, U, V nichtleere, echte, in $f(A)$ rel. offene Teilmengen von $f(A)$

$\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subseteq Y$ offen mit $U = \tilde{U} \cap f(A)$, $V = \tilde{V} \cap f(A)$

Betrachte $U_1 = A \cap f^{-1}(\tilde{U})$, $V_1 = A \cap f^{-1}(\tilde{V})$

f stetig, $\tilde{U}, \tilde{V} \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(\tilde{U}), f^{-1}(\tilde{V}) \subseteq X$ offen (*)

$U_1 \cap V_1 = \emptyset$, denn: $x \in U_1 \cap V_1 \Rightarrow f(x) \in U \cap V$ ↯

$U_1, V_1 \neq \emptyset$, da $U, V \neq \emptyset$

(*) $\Rightarrow U_1, V_1$ rel. offen in A $\Rightarrow$ A nicht zshgd ↯ $\square$

Zwischenwertsatz

Satz (6.5)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $a, b \in A$ vorgegeben. Dann nimmt f auf A jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ an.

Betrachte $U_1 = A \cap f^{-1}(\tilde{U})$ $V_1 = A \cap f^{-1}(\tilde{V})$

Beweis des Zwischenwertsatzes:

(X, d) metr. Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, $A \subseteq X$ zshgd.

$a, b \in A$, $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < d < f(b)$

Prop. (6.4) $\Rightarrow$ $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ zshgd. Satz (6.3) $\Rightarrow$

$f(A)$ Intervall $\quad f(a), f(b) \in f(A)$, $f(a) < f(b)$.

$f(A)$ Intervall $\Rightarrow$ $d \in f(A)$, d.h. $\exists\, c \in A$ mit $f(c) = d$. $\square$