§ 4. Offene und abgeschlossene Teilmengen

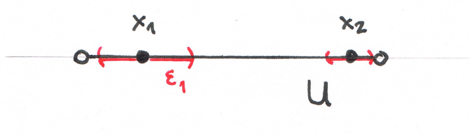
Definition (4.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird offen genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ existiert.

Offene Intervalle sind offen

Proposition (4.2)

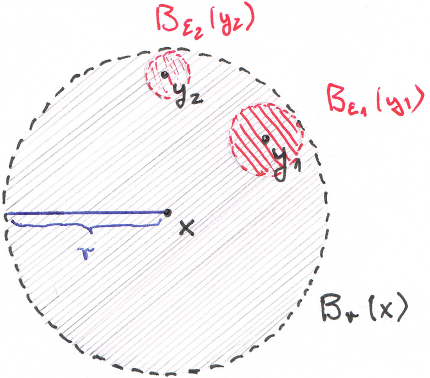
Jedes offene Intervall $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ ist eine offene Teilmenge bezüglich der Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$.



Offene Bälle sind offen

Proposition (4.3)

Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann ist jeder offene Ball $B_r(x)$ eine offene Teilmenge von X.



Metrische Räume als topologische Räume

Satz (4.5)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt

(i) Die Teilmengen $\varnothing$ und X sind offen.

(ii) Sind U und V offen, dann auch die Schnittmenge $U \cap V$.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Ist X eine Menge, dann wird ein System $\mathscr{T}$ von Teilmengen von X mit den Eigenschaften (i) bis (iii) eine Topologie auf X genannt. Das Paar $(X, \mathscr{T})$ bezeichnet man dann als topologischen Raum.

Beweis von Prop. (4.5) geg (X, d) metrischer Raum

zu (i) X und $\emptyset$ sind offen

Offenheit von X: Sei $x \in X$ Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig (z.B $\varepsilon = 1$)

Dann gilt offensichtlich $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subseteq X$

Offenherheit von $\emptyset$: z.zg. $\forall x \in \emptyset : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq \emptyset$

Jede Aussage der Form $\forall x \in \emptyset : \ldots$ ist wahr!

zu (ii) erledigt

zu (iii) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen.

z.zg. $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen Sei $x \in U \Rightarrow \exists i \in I$:

$x \in U_i$ U_i ist offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ . B_\varepsilon(x) \subseteq U_i$

$U_i \subseteq U \rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U$ $\square$

Umgebung eines Punkts in einem metrischen Raum

Definition (4.6)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird Umgebung von x genannt, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ existiert.

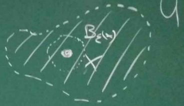
Proposition (4.7)

Seien die Bezeichnungen wie in der Umgebungsdefinition gewählt. Eine Teilmenge U von X ist genau dann eine Umgebung von $x \in X$, wenn eine offene Menge V mit $V \subseteq U$ und $x \in V$ existiert.

$B_\varepsilon(x) \subseteq U$ □

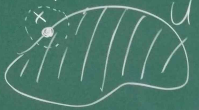
Beispiele:

(i) Ist (X, d) metrischer Raum und $x \in X$, dann ist jede offene Teilmenge U von X mit $x \in U$ eine Umgebung (eine offene Umg.)



(ii) weiteres Beispiel:

(iii) keine Umgebung



Beweis von Prop. (4.7)

geg.: metr. Raum (X, d), $U \subseteq X$, $x \in U$

z.zg.: U Umgebung von x $\Longleftrightarrow$ $\exists$ offene Teilm. V von X mit $x \in V$, $V \subseteq U$

„$\Longrightarrow$": U Umg. von x $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$\Rightarrow$ Aussage rechts erfüllt mit $V = B_\varepsilon(x)$, da offene Bälle offen sind

„$\Longleftarrow$" z.zg.: $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$

V ist offen, $x \in V \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq V \xrightarrow{V \subseteq U} B_\varepsilon(x) \subseteq U$ $\square$

Prop. (4.8)

Bedeutung des Umgebungsbegriffs für die Konvergenz

Die Konvergenz von Folgen kann auch mit Hilfe von Umgebungen beschrieben werden: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in X$, wenn für jede Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

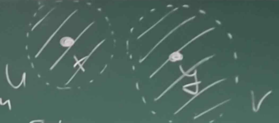
Die Hausdorffsche Trennungseigenschaft

Proposition (4.8)

Sei X ein metrischer Raum, und seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \varnothing$.

$B_\varepsilon(x) = U$ $\square$

Bew. von Prop. (4.8)



geg.: (X, d) metrischer Raum

$x, y \in X$, $x \neq y$ z.zg.: $\exists$ Umg U von x, V von y
mit $U \cap V = \emptyset$. Sei $r = d(x,y)$, $U = B_{r/2}(x)$
und $V = B_{r/2}(y)$. U ist offen, $x \in U \Rightarrow U$ Umg von x
V ist offen, $y \in V \Rightarrow V$ Umg von y

Beh.: $U \cap V = \emptyset$. Ang., es gibt einen Punkt $z \in U \cap V$

$z \in U \Rightarrow d(x,z) < \frac{1}{2} r$, $z \in V \Rightarrow d(y,z) < \frac{1}{2} r$

$\Rightarrow r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r$ $\square$

$\Rightarrow r < r$ ↯

Charakterisierung stetiger Abbildungen

Satz (4.9)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y), und sei $a \in X$. Genau dann ist f stetig in a, wenn für jede Umgebung V von $f(a)$ die Urbildmenge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a ist.

Folgerung (4.10)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subseteq Y$ offen ist.

Anwendungsbeispiel für Folgerung (4.9): 

Bsp. $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ ist offen

bekannt: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto y$ ist stetig

leicht zu überprüfen: $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ offen

Es gilt $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = U$, denn: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$(x,y)\in f^{-1}(\mathbb{R}^+) \iff f(x,y)\in\mathbb{R}^+ \iff y\in\mathbb{R}^+$

$\iff y>0 \iff (x,y)\in U$

(4.10) $\Rightarrow$ U ist offen

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto y-x^2$ 

$g^{-1}(\mathbb{R}^+)$:  ebenfalls offen wg (4.10)

Beweis von Satz (4 9).

geg. Abb. $f: X \to Y$ zwischen metrischen Räumen

$a \in X$ Beh.: f stetig in a $\iff$ Für jede Umgebung V von $f(a)$ ist $f^{-1}(V)$ Umg von a.

„$\Rightarrow$" Vor.: f stetig in a, V Umg von $f(a)$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. ε-δ-Kriterium $\Rightarrow$

$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X : d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon$

Beh.: $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$ (Damit ist $f^{-1}(V)$ dann eine Umgebung von a.) Sei $x \in B_\delta(a) \Rightarrow d(a,x) < \delta$

$\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} d(f(a), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow f(x) \in V$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(V) \Rightarrow$ Beh

"$\Longleftarrow$" Zeige, dass unter Vor. rechts das ε-δ-Kriterium für a erfüllt ist. Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

Wende die Vor auf $V = B_\varepsilon(f(a))$ an $\Rightarrow f^{-1}(V)$ ist Umgebung von a $\Rightarrow \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ : B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$

<u>Beh.</u>: $\forall x \in X : d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon$

Sei $x \in X$ mit $d(a,x) < \delta$. $\Rightarrow x \in B_\delta(a) \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon$ ($\Rightarrow$ Beh) $\square$

2. Fall: $x < a$ Sei $\varepsilon = a - x \in \mathbb{R}^+$ Beh.: $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a,b]$

Beweis von Folgerung (4.10).

geg. Abbildung $f: X \to Y$ zwischen metr. Räumen

z.zg.: f stetig (in jedem Punkt $a \in X$) $\iff$ Das Urbild jeder offenen Menge ist offen

„$\Longrightarrow$": Sei $V \subseteq Y$ offen, z.zg.: $f^{-1}(V)$ offen in X

Sei $a \in f^{-1}(V)$. z.zg.: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $B_\varepsilon(a) \subseteq f^{-1}(V)$

$a \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(a) \in V$. V offen $\Rightarrow V$ Umg von $f(a)$

$\xrightarrow[(4.9)]{f \text{ stetig in } a}$ $f^{-1}(V)$ ist Umg. von a $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit

$B_\varepsilon(a) \subseteq f^{-1}(V)$

"$\Leftarrow$" Sei $a \in X$ z.zg.: f stetig in a. Nach (4.9) genügt es z.zg., dass für jede Umg. V von $f(a)$ die Urbildmenge $f^{-1}(V)$ Umg. von a ist. Sei also V Umg. von $f(a)$ $\Rightarrow$ $\exists$ offene Menge U mit $f(a) \in U$, $U \subseteq V$. Vor. $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ ist offen, $a \in f^{-1}(U)$, denn $f(a) \in U$, $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$ wg. $U \subseteq V$

insgesamt: $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von a $\square$

Definition abgeschlossener Mengen

Definition (4.11)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ wird (genau dann) als abgeschlossen bezeichnet, wenn ihr Komplement $U = X \setminus V$ offen ist.

wichtig:

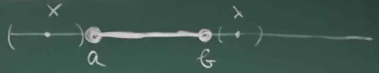
Die Aussage „Y ist abgeschlossen“ ist nicht gleichbedeutend mit der Aussage „Y ist nicht offen“. Es gibt Teilmengen metrischer Räume, die offen und abgeschlossen sind, und ebenso Teilmengen, die weder offen noch abgeschlossen sind!

Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen

Proposition (4.12)

Die abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}$ der Form $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sind abgeschlossen.

Bew. von Prop. (4.12):



geg. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$

Beh.: $[a,b]$ ist abgeschlossen

z.zg.: $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ ist offen

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b] \Rightarrow x < a$ oder $x > b$

1. Fall: $x > b$ Sei $\varepsilon = x - b \in \mathbb{R}^+$

Beh.: $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a,b]$ Sei $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow$

$|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y > x - \varepsilon = x - (x - b) = b \Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$

2. Fall: $x < a$ Sei $\varepsilon = a - x \in \mathbb{R}^+$ Beh.: $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a,b]$

Sei $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow |y - x| < \varepsilon \Rightarrow y < x + \varepsilon = x + (a - x) = a \Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$

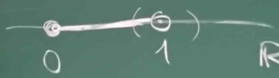
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b] \Rightarrow x < a$ oder $x > b$

1 Fall: $x > b$ Sei $\varepsilon = x - b \in \mathbb{R}^+$

Beh: $[0,1[$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$

$[0,1[$ nicht offen

Es gibt kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq [0,1[$ (da $-\frac{1}{2}\varepsilon \in B_\varepsilon(0)$, aber $-\frac{1}{2}\varepsilon \notin [0,1[$)



$[0,1[$ nicht abgeschlossen, weil $\mathbb{R} \setminus [0,1[$ nicht offen ist

$1 \in \mathbb{R} \setminus [0,1[$, aber es gibt kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(1) \subseteq \mathbb{R} \setminus [0,1[$

Abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen

Proposition (4.13)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann ist der abgeschlossene Ball $\bar{B}_r(a)$ um a vom Radius r abgeschlossen.